I-278　梁の振動の初期境界値问題（第2報）

信州大学　正員　○石川清志
〃　〃　谷本勉之助
〃　〃　夏目正太郎

1．まえがき　梁のたわみについては，曲げモーメントの影響のほかに，せん断力の影響を考え，さらに梁に作用する慣性抵抗についてはたわみ w によるもののほかに，回転角 ψ による回転慣性まで考慮に入れているTimoshenko梁についての初期境界値问題である．これは基礎微分方程式の一般解を与えられた境界条件および初期条件で一般解の未定積分常数である固有マトリクス（Eigenmatrix）を過不足なく唯一に解く方法である．ここでのTimoshenko梁は振動エネルギーが種々の原因により，消耗あるいは逸散することによる減衰自由振動の系である．いま振動梁において，振動の減衰抵抗はたわみおよび回転角の速度に比例するものと仮定する：

（たわみに対する減衰抵抗力）$=-h\frac{\partial w}{\partial t}dx$，（回転角に対する減衰抵抗力）$=-H\frac{\partial \psi}{\partial t}dx$.　(1)

hおよびHは減衰係数である．また振動梁の基準座標による固有関数の直交性は基礎微分方程式および境界条件の特性により，一般的に異るものであるから，ここでは固有関数を直交性のもつFourier sine級数で展開するのが便利である．

2．解析方法　式(1)を取入れた減衰性のあるTimoshenko梁の基礎式は連立偏微分方程式となる：

$$\begin{bmatrix} kGA\frac{\partial}{\partial x}, & EI\frac{\partial^2}{\partial x^2}-kGA-H\frac{\partial}{\partial t}-\frac{I\gamma}{g}\frac{\partial^2}{\partial t^2} \\ kGA\frac{\partial^2}{\partial x^2}-h\frac{\partial}{\partial t}-\frac{A\gamma}{g}\frac{\partial^2}{\partial t^2}, & -kGA\frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} w \\ \psi \end{bmatrix}=0. \qquad (2)$$

または無次元座標 $\rho=\frac{x}{L}$ を用いてのTimoshenko梁の基礎微分方程式は

$$\left[\frac{\partial^4}{\partial \rho^4}-a\frac{\partial^3}{\partial \rho^2\partial t}-b\frac{\partial^4}{\partial \rho^2\partial t^2}-c\frac{\partial}{\partial t}-d\frac{\partial^2}{\partial t^2}-e\frac{\partial^3}{\partial t^3}-f\frac{\partial^4}{\partial t^4}\right](w,\psi)=0. \qquad (3)$$

比較のために減衰の作用しない場合は

$$\left[\frac{\partial^4}{\partial \rho^4}-a\frac{\partial^4}{\partial \rho^2\partial t^2}-d\frac{\partial^2}{\partial t^2}-e\frac{\partial^4}{\partial t^4}\right](w,\psi)=0. \qquad (4)$$

式(3)における減衰性のあるTimoshenko梁の一般解は

$$\begin{bmatrix} w \\ \psi \end{bmatrix}=\sum_{\omega}^{\infty}\begin{bmatrix} \cos\lambda\rho & \sin\lambda\rho & ch\mu\rho & sh\mu\rho \\ -p\sin\lambda\rho & p\cos\lambda\rho & q\,sh\mu\rho & q\,ch\mu\rho \end{bmatrix}\mathcal{N}e^{-\omega t}, \quad \mathcal{N}\ \{A\ \ B\ \ C\ \ D\}. \qquad (5)$$

ここにおいて $\mathcal{N}$ は（4 by 1）の固有マトリクス，λ，μ，p，q は ω に従属する．ω は一般に境界条件により異り必ずしも実数とは限らず，負のこともまた複素数のこともあり得る．ω は境界条件より固有値方程式が得られ，これより決定される．境界条件により，固有マトリクスはさらに次元数を減じて1個の未定常数に従属することになり，最終方程式として初期条件により，最後の未定常数が唯一に決定されることになる．初期条件として考えられるものは通常，変位と速度の2本の条件式が与えられるが，ω が複素数として考えると，2倍の自由度となるため唯一に対応し解けることになる．

3．まとめ　ここで用いた解析方法は在来の固有関数法（Eigenfunction method）の延長である．過去に，矩形板の曲げ解析およびAiry関数を用いての平面応力问題の静的2次元解析に用いられている．これらの固有関数法は重調和微分方程式であり，境界条件により，複素固有関数法の解析である．ここでの固有関数法は動的问題にも適応したものである．