

北海道大学 学生員 橋本 哲  
 " 正員 能町 純雄  
 " 学生員 岸 徳光

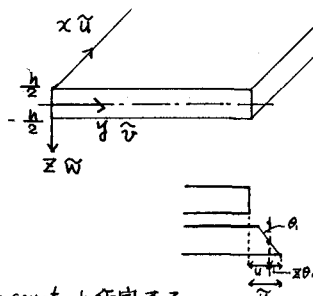
1. まえがき 棒状体を伝播する曲げたわみ波動は、古典曲げ理論に回転慣性とせん断変形を考慮する Timoshenko ばかりによって、平面保持を仮定しながら高周波領域まで適用範囲を拡張することができた。また、弾性板の曲げ波動について Mindlin は同様の考え方による拡張を試みている。

本論文では Mindlin Plate Theory を用いるとき、平板の自由境界辺において局所的な曲げ波動が、弾性体の表面における Rayleigh 波のように存在するかどうかを、検討したものである。

2. 解析理論

3次元弾性論のつり合式は

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} &= \rho \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial t^2} \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} &= \rho \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial t^2} \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} &= \rho \frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial t^2} \end{aligned} \right\} (1)$$



ここで  $\tilde{u} = u + \theta_x z$ ,  $\tilde{v} = v + \theta_z x$ ,  $\tilde{w} = w = \text{const}$  と仮定する。

$\tilde{u}$ ,  $\tilde{v}$  には  $z$  を掛けて  $-\frac{h}{2} \sim \frac{h}{2}$  まで積分し,  $\tilde{w}$  は  $-\frac{h}{2} \sim \frac{h}{2}$  まで積分し 式(1)を考慮すると次の3式が得られる。

$$\frac{D}{2} [(1-\nu) \nabla^2 \theta + (1+\nu) \frac{\partial \Phi}{\partial x}] - G'h (\theta + \frac{\partial w}{\partial x}) = \frac{\rho h^3}{12} \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} \quad (2)$$

$$\frac{D}{2} [(1-\nu) \nabla^2 \theta_z + (1+\nu) \frac{\partial \Phi}{\partial y}] - G'h (\theta_z + \frac{\partial w}{\partial y}) = \frac{\rho h^3}{12} \frac{\partial^2 \theta_z}{\partial t^2} \quad (3)$$

$$G'h (\Phi + \nabla^2 w) = \frac{\rho h^3}{12} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (4)$$

ここで  $D = \frac{Eh^3}{12} (2G + \lambda)$ ,  $\lambda$ : Lamé の定数,  $\nu = \frac{\lambda}{D}$ ,  $\Phi = \frac{\partial \theta}{\partial x} + \frac{\partial \theta_z}{\partial y}$

$\nabla$ : Laplace's Operation,  $G' = \alpha G$

(3)(4)より  $\frac{\partial(3)}{\partial x} + \frac{\partial(4)}{\partial y}$

$$(D \nabla^2 - G'h - \frac{\rho h^3}{12}) \Phi = G'h \nabla w \quad (5)$$

(4)(5)より

$$(D \nabla^2 - \frac{\rho h^3}{12} \frac{\partial^2}{\partial t^2}) (\nabla^2 - \frac{\rho}{G'} \frac{\partial^2}{\partial t^2}) w + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \quad (6)$$

局所的な曲げたわみ振動を次のように仮定する。

$$\left. \begin{aligned} w &= W e^{-\lambda y} \sin \alpha (x - ct), & \Phi &= \Phi e^{-\lambda y} \sin \alpha (x - ct) \\ \theta &= \Theta e^{-\lambda y} \cos \alpha (x - ct), & \theta_z &= \Theta_z e^{-\lambda y} \sin \alpha (x - ct) \end{aligned} \right\} (7)$$

ただし  $\alpha = \frac{2\pi}{l}$ ,  $l$ : 波長,  $\lambda > 0$

式(1)を式(6)に代入して整理するとわみは次のように示される。

$$w = (W_1 e^{-\lambda y} + W_2 e^{-\lambda_2 y}) \sin \alpha (x - ct) \quad (8)$$

式(8)を式(5)に代入して、一般解と特殊解に分けて微分方程式を解くと次のようになる。

$$\bar{w} = (\bar{\Phi}_1 e^{-\lambda_1 y} + \bar{\Phi}_2 e^{-\lambda_2 y} + \bar{\Phi}_3 e^{-\lambda_3 y}) \sin \alpha(x - ct) \quad (9)$$

したがって、 $\theta_1, \theta_2$  は式(7)を用いて式(8), (9)を式(2), (3)に代入することによって求めることができる。

$$\theta_1 = (\Theta_{11} W_1 e^{-\lambda_1 y} + \Theta_{12} W_2 e^{-\lambda_2 y} + \Theta_{13} \bar{\Phi}_3 e^{-\lambda_3 y}) \cos \alpha(x - ct) \quad (10)$$

ここに  $W_1, W_2, \bar{\Phi}_1 \sim \bar{\Phi}_3, \Theta_{11} \sim \Theta_{13}$  は積分常数である。

$$\left. \begin{aligned} \Theta_{12} &= \frac{-(1+\bar{\nu})\bar{\Phi}_2 + \frac{2}{r_f^2 \bar{\nu}_f^2}}{\alpha \left\{ (1-\bar{\nu})(\chi_2^2 - 1) - \frac{2}{\alpha^2 r_f^2 \bar{\nu}_f^2} + 2 \frac{\bar{\nu}_f^2}{\bar{\nu}_f} \right\}} \\ \Theta_{13} &= \frac{-(1+\bar{\nu})}{\alpha \left\{ (1-\bar{\nu})(\chi_3^2 - 1) - \frac{2}{\alpha^2 r_f^2 \bar{\nu}_f^2} + 2 \frac{\bar{\nu}_f^2}{\bar{\nu}_f} \right\}} \end{aligned} \right\} \quad (i=1,2) \quad (11)$$

$\chi_i = \frac{\lambda_i}{\alpha} \quad (i=1,2,3)$ ,  $\bar{\nu}$ : セン断変形に対する比速度,  $\bar{\nu}_f = 2(1-\nu)/(1-2\nu)$ ,  $r_f$ : 断面2次半径

同様にして

$$\theta_2 = (\Theta_{21} W_1 e^{-\lambda_1 y} + \Theta_{22} W_2 e^{-\lambda_2 y} + \Theta_{23} \bar{\Phi}_3 e^{-\lambda_3 y}) \sin \alpha(x - ct) \quad (12)$$

ここに  $W_1, W_2, \bar{\Phi}_1 \sim \bar{\Phi}_3, \Theta_{21} \sim \Theta_{23}$  は積分常数である。

$$\left. \begin{aligned} \Theta_{21} &= -\frac{\chi_1 \left\{ -(1+\bar{\nu})\bar{\Phi}_1 + \frac{2}{r_f^2 \bar{\nu}_f^2} \right\}}{\alpha \left\{ (1-\bar{\nu})(\chi_1^2 - 1) - \frac{2}{\alpha^2 r_f^2 \bar{\nu}_f^2} + 2 \frac{\bar{\nu}_f^2}{\bar{\nu}_f} \right\}} \\ \Theta_{23} &= -\frac{\chi_3 \left\{ -(1+\bar{\nu})\bar{\Phi}_3 \right\}}{\alpha \left\{ (1-\bar{\nu})(\chi_3^2 - 1) - \frac{2}{\alpha^2 r_f^2 \bar{\nu}_f^2} + 2 \frac{\bar{\nu}_f^2}{\bar{\nu}_f} \right\}} \end{aligned} \right\} \quad (i=1,2) \quad (13)$$

以上式(8), (10), (12), より各変位成分が求まった。これを断面力の式に代入し境界における変位断面力の関係式を求める。なお Mindlin Plate は古典理論と異なり3つの境界断面力が求められる。

$$Q_y = G'h \left( \theta_2 + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \quad M_y = D \left( \frac{\partial \theta_2}{\partial y} + \bar{\nu} \frac{\partial \theta_1}{\partial x} \right) \quad M_{yx} = G'I \left( \frac{\partial \theta_1}{\partial y} + \frac{\partial \theta_2}{\partial x} \right)$$

以上をマトリックス形式に整理して  $|K|[\delta] = \{F\}$

$[\delta] \neq 0, \{F\} = 0$ , よって  $\det |K| = 0$  より固有の位相速度を求めることができる。

### 3. 結果について

Mindlin Plate を用いることによって半無限板の直線境界に、局部的な曲げ波動が存在することがわかった。この曲げ波動はポアソン比によって異なるが、大体板厚の5倍を最大波長とし分散性を有し、波長が小さくなるに従って、セン断変形の厚さ方向の平均値  $\bar{\nu} = 1$  とするとき  $\sqrt{G/\rho}$  に一致する。また最大波長の附近では非常に遅い位相速度である。

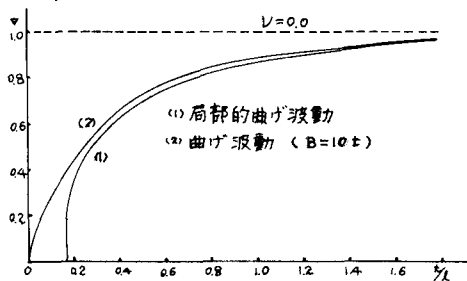


図1 位相速度分散曲線

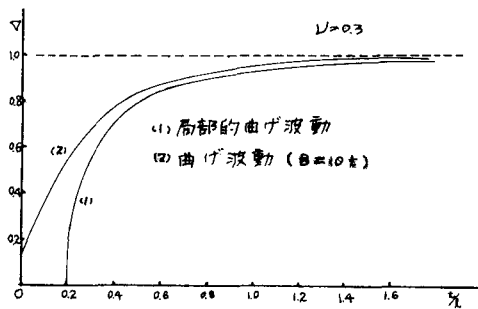


図2 位相速度分散曲線

参考文献: Mindlin, R.D.: Influence of Rotatory Inertia and Shear on Flexural Motions of Isotropic, Elastic Plates. J.A.M. March 1951