

北大 工学部	学生員	川上 博史
北大 工学部	正 員	能町 純雄
北大 工学部	学生員	岸 徳光

1. まえがき 構造物に衝撃荷重が作用した場合の過渡的性状を調べることは非常に興味のある問題である。本論文ではこのような問題に対する1つの例題として一対辺単純支持他端無限なる矩形板を考え、この矩形板の幅方向に *sinusoidal* 分布の ① 局部的初期弾性変形がある場合、② 極部の初期力積荷重が作用した場合 について解析し、曲げの伝播性状について調べることにする。

2. 解析理論 図-1 のような一対辺単純支持された矩形板をとりだし幅 B 、板厚 h 、剛性を D とする。せん断変形、回転慣性、さらに粘性項を無視すると平板の動的基礎微分方程式は

$$D \Delta^2 W + \rho h \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = 0 \quad \text{---- (1)}$$

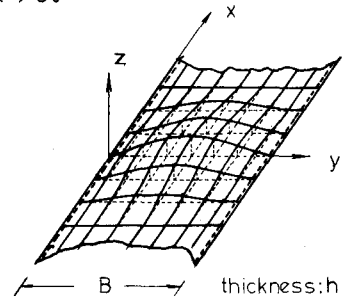


図-1 初期変形をうける平板

y 方向のたわみ分布を *Sine curve* に仮定しているので上式の両辺に e^{imx} を乗じ $-\infty < x < \infty$ の間に指数型変換をおこない、さらに部分積分して整理すると、

$$\left[\left\{ m^2 + \left(\frac{\pi}{B} \right)^2 \right\} + \rho C_p \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] W = 0 \quad \text{---- (2)}$$

ただし、 ρ は断面二次半径、 $C_p^2 = \frac{E}{1-\nu^2} \rho$ $W = \sin \frac{\pi y}{B} \int_{-\infty}^{\infty} w e^{imx} dx$ である。式(2)の微分方程式を解いて指数型の逆変換を施すとたわみは次のように示される。

$$W = \sin \frac{\pi y}{B} \int_{-\infty}^{\infty} \left[A \cos \left[\rho C_p \left\{ m^2 + \left(\frac{\pi}{B} \right)^2 \right\} t \right] + B \sin \left[\rho C_p \left\{ m^2 + \left(\frac{\pi}{B} \right)^2 \right\} t \right] \right] e^{imx} dm \quad \text{---- (3)}$$

ただし、 A, B は初期条件によって決まる未知定数である。

式(3)より矩形板に衝撃荷重が作用する場合の動的応答を求めることができる。

i) 初期弾性変形を有する場合

初期条件は、 $t=0$ において、粒子速度零、また軸方向たわみ分布がガウス分布 ($= w_0 e^{-ax^2}$) にしたがるものとする。これより W は

$$W = \frac{w_0}{2\sqrt{a\rho C_p}} \sin \frac{\pi y}{B} \int_{-\infty}^{\infty} \cos \left[\rho C_p \left\{ m^2 + \left(\frac{\pi}{B} \right)^2 \right\} t \right] e^{-\frac{m^2}{2a}} e^{imx} dm \quad \text{---- (4)}$$

式(4)を m の方向に閉じた式に整理すると初期弾性変形を有する場合の動的性状が求められる。

$$W = w_0 \sin \frac{\pi y}{B} \left\{ 1 + (4a\rho C_p t)^2 \right\}^{-\frac{1}{4}} \exp \left[\frac{-ax^2}{1 + (4a\rho C_p t)^2} \right] \cos \left\{ \rho C_p \frac{\pi^2}{B^2} t - \frac{4a^2 \rho C_p t x^2}{1 + (4a\rho C_p t)^2} + \frac{1}{2} \tan^{-1} (4a\rho C_p t) \right\} \quad \text{---- (5)}$$

ii) 初期力積荷重が作用した場合

初期条件は、 $t=0$ において、たわみ分布零、また粒子速度分布がガウス分布 ($= V_0 e^{-ax^2}$) にしたがるものとする。これより W は

$$W = \frac{V_0}{2\sqrt{a\rho C_p}} \sin \frac{\pi y}{B} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\left\{ m^2 + \left(\frac{\pi}{B} \right)^2 \right\}} \sin \left[\rho C_p \left\{ m^2 + \left(\frac{\pi}{B} \right)^2 \right\} t \right] e^{-\frac{m^2}{2a}} e^{imx} dm \quad \text{---- (6)}$$

また粒子速度分布は式(6)より求められ

$$v = v_0 \sin \frac{\pi}{B} y \{1 + (4\alpha \tau_0 t)^2\}^{\frac{1}{4}} \exp\left\{\frac{-\alpha x^2}{1 + (4\alpha \tau_0 t)^2}\right\} \cos\left\{\tau_0 \frac{\pi^2}{B^2} x^2 - \frac{4\alpha^2 \tau_0^2 t^2 x^2}{1 + (4\alpha \tau_0 t)^2} + \frac{1}{2} \tan^{-1}(4\alpha \tau_0 t)\right\} \quad \text{--- (7)}$$

となる。なお式(6)は閉じた型に整理することができないので数値積分に頼らなければならない。

3. 数値計算例 板厚 $h=1$ cm 板幅 $B=50$ H の鋼板(板 SM41)を用いる。

① 初期最大たわみを $w_0=0.05$ H としたときの動的性状を図-2に示す。

② 図-3に初期衝撃が作用した場合の $x=0$, $y=B/2$ 点の曲げモーメント M_x の時間方向分布を示す。これより初期粒子速度が $V_0=4.211$ m/sec のときモーメントの最大値が板の許容曲げモーメントになることがわかる。また同図に V_0 を代入したときの同点での時間方向のたわみ分布、粒子速度分布を示す。

③ 図-4に初期衝撃が作用した場合の動的状態を示す。

4. まとめ 以上より、対辺単絶支持他端無限板に初期弾性変形のある場合の時間的な分散性状を図化することができた。また力積荷重消失後の矩形板のたわみ、曲げモーメント等の分散状態を図化することによりたわみ、曲げモーメントピーク値の時間的なずれを明確にすることができた。また数値結果によれば力積荷重に対して最大曲げモーメントは 2.95×10^{-4} 秒に生ずる。

参考文献 Morse: *Vibration and Sound*

森口繁一, 宇田川銑久, 一松信著: 数学公式II

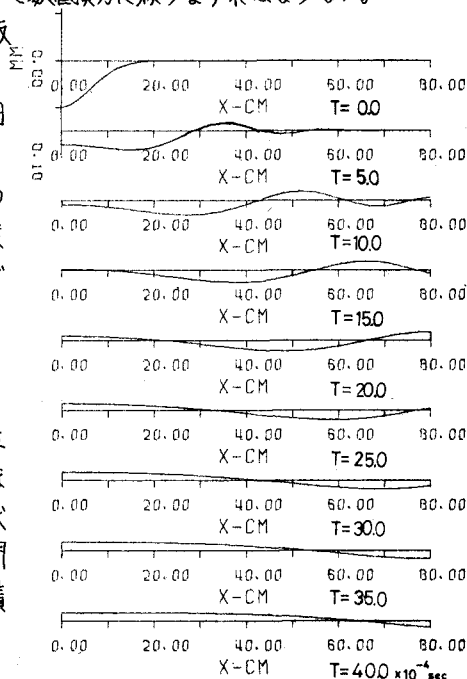


図-2 初期弾性変形がある場合の分散状態

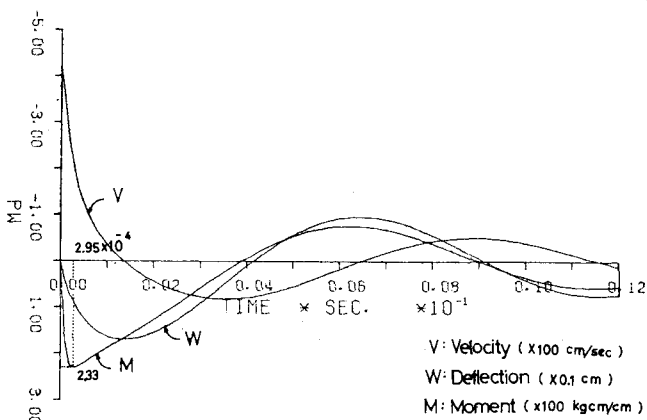


図-3 初期衝撃が作用した場合の $x=0$, $y=B/2$ 点の曲げモーメントの推移状態

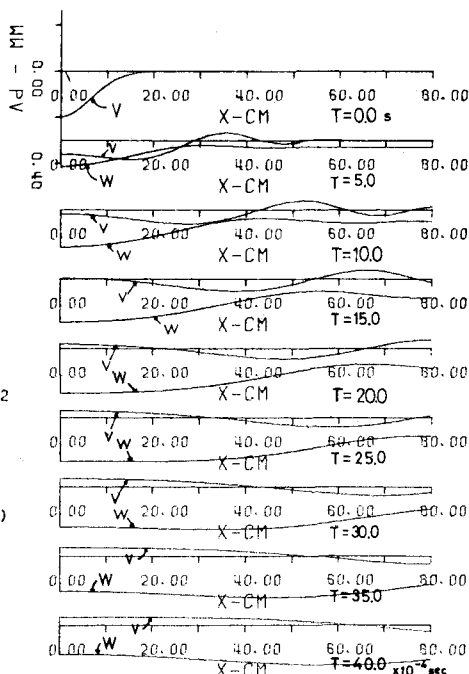


図-4 初期衝撃が作用した場合の分散状態