I-270　多層地盤の振動の剛性マトリックスによる解法

北海道大学工学部　○学生員　馬場敦美
北海道大学工学部　　正　員　渡辺　昇
北海道大学工学部　　正　員　金子孝吉

1．まえがき

本論文は，せん断連続体の振動の剛性マトリックスを誘導し，これを多層地盤の振動の解析に応用するものである。一般に多層地盤における固有振動数方程式は地盤が多層になるにしたがって複雑な超越方程式になるが，この手法を用いると，単に剛性マトリックスを重ねあわせることにより固有振動数方程式を求めることができる。さらに電子計算機により容易に固有振動数を求めることが可能になった。したがって固有振動数及び固有モード型の計算から応答波の計算まで一貫したプログラムの作成が可能になった。

2．連続体のせん断振動の微分方程式とその解

連続体のせん断振動の微分方程式は，次式で表わされる．（Fig-1，Fig-2）

$$\rho\frac{\partial^2 u(z,t)}{\partial t^2}+c\frac{\partial u(z,t)}{\partial t}-G\frac{\partial^2 u(z,t)}{\partial z^2}=0 \quad \cdots\cdots(1)$$

ただし，ρ；単位重量密度（$kg\cdot sec^2/cm^4$），c；粘性減衰係数（$kg\cdot sec/cm^4$），G；せん断弾性係数（kg/cm^2），$u(z,t)$；深度zにおける時刻tでの水平x方向の相対変位(cm)である。式(1)の解として次のようなものをとる。

$$u(z,t)=Z(z)\cdot T(t) \quad \cdots\cdots(2)$$

(2)式を適当に微分して(1)式に代入し，$\rho\cdot Z(z)\cdot T(t)$で割って次式のように$-p^2$とおく。

$$\ddot{T}(t)/T(t)+2hp\cdot\dot{T}(t)/T(t)=Z''(z)/Z(z)\cdot a^2=-p^2 \quad \cdots\cdots(3)$$

ここで，$a^2=\rho/G$，$2hp=c/\rho$，$h=c/2\rho p$であり，ドットはtについての微分，ダッシュはzについての微分を表わす。

すると次の２つの式に分離できる。

$$Z''(z)+a^2p^2Z(z)=0 \quad \cdots(4) \qquad \ddot{T}(t)+2hp\dot{T}(t)+p^2T(t)=0 \quad \cdots\cdots(5)$$

(4)式の一般解は次のようになる。

$$Z(z)=A\cos apz+B\sin apz \quad \cdots\cdots(6)$$

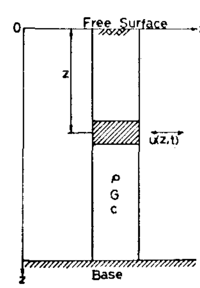

Fig.—1

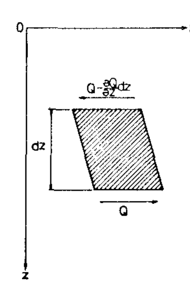

Fig.—2

3．連続体のせん断振動の剛性マトリックスと積分定数マトリックス

任意の深さzにおけるせん断応力Qは次のようになる。

$$Q(z)=GZ'(z)=G(-Aap\sin apz+Bap\cos apz) \quad \cdots\cdots(7)$$

ここでZ，Qの符号はFig-3に示すものを正とする。(6)式，(7)式において$z=0$，$z=\ell$とし，それぞれマトリックス表示すると次のようになる。

$$\begin{bmatrix}Z(0)\\Q(0)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\0&Gap\end{bmatrix}\begin{bmatrix}A\\B\end{bmatrix} \quad \cdots\cdots(8) \qquad \begin{bmatrix}Z(\ell)\\Q(\ell)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos ap\ell&\sin ap\ell\\-Gap\sin ap\ell&Gap\cos ap\ell\end{bmatrix}\begin{bmatrix}A\\B\end{bmatrix} \quad \cdots\cdots(9)$$

(8)式，(9)式を変形して次のように表わしたものは，それぞれ等しいから(12)式のように表わされる。

$$\begin{bmatrix}A\\B\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\0&1/Gap\end{bmatrix}\begin{bmatrix}Z(0)\\Q(0)\end{bmatrix} \quad \cdots\cdots(10) \qquad \begin{bmatrix}A\\B\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos ap\ell&-\sin ap\ell/Gap\\\sin ap\ell&\cos ap\ell/Gap\end{bmatrix}\begin{bmatrix}Z(\ell)\\Q(\ell)\end{bmatrix} \quad \cdots\cdots(11)$$

$$\begin{bmatrix}1&0\\0&1/Gap\end{bmatrix}\begin{bmatrix}Z(0)\\Q(0)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos ap\ell&-\sin ap\ell/Gap\\\sin ap\ell&\cos ap\ell/Gap\end{bmatrix}\begin{bmatrix}Z(\ell)\\Q(\ell)\end{bmatrix} \quad \cdots\cdots(12)$$

(12)式を書き直すと(13)式のようになる。

$$\begin{bmatrix} 1 & -\cos ap\ell \\ 0 & -\sin ap\ell \end{bmatrix}\begin{bmatrix} Z(0) \\ Z(\ell) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & -\sin ap\ell/Gap \\ -1/Gap & \cos ap\ell/Gap \end{bmatrix}\begin{bmatrix} Q(0) \\ Q(\ell) \end{bmatrix} \quad \cdots\cdots(13)$$

さらに(13)式を変形すると(14)式のようになる。

$$\begin{bmatrix} Q(0) \\ Q(\ell) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -Gap\cos ap\ell/\sin ap\ell & Gap/\sin ap\ell \\ -Gap/\sin ap\ell & Gap\cos ap\ell/\sin ap\ell \end{bmatrix}\begin{bmatrix} Z(0) \\ Z(\ell) \end{bmatrix} \quad \cdots\cdots(14)$$

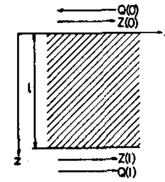

Fig-3

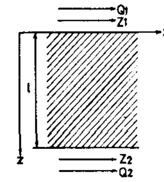

Fig-4

Fig-4において上端$z=0$……①，下端$z=\ell$……②のように番号をつけZ，Qの符号はFig-4のようなものを正とする。すると(17)式において対応する要素の符号が変わり(15)式のようになる。

$$\begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} Gap/\tan ap\ell & -Gap/\sin ap\ell \\ -Gap/\sin ap\ell & Gap/\tan ap\ell \end{bmatrix}\begin{bmatrix} Z_1 \\ Z_2 \end{bmatrix} \quad \cdots\cdots(15)$$

(15)式の右辺の係数マトリックスを"連続体のせん断振動の剛性マトリックス"と呼ぶことにする。また(8)式，(9)式から$Z(0)$，$Z(\ell)$をマトリックス表示すると次のようになる。

$$\begin{bmatrix} Z(0) \\ Z(\ell) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \cos ap\ell & \sin ap\ell \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} \quad \cdots\cdots(16)$$

さらに(16)式を変形して$Z(0)=Z_1$，$Z(\ell)=Z_2$と書き直すと

$$\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1/\tan ap\ell & 1/\sin ap\ell \end{bmatrix}\begin{bmatrix} Z_1 \\ Z_2 \end{bmatrix} \quad \cdots\cdots(17)$$

となる。(17)式の右辺の係数マトリックスを"連続体のせん断振動の積分定数マトリックス"と呼ぶことにする。以上の結果をまとめて記号で表わすと右のようになる。

剛性マトリックス

$$\begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} Z_1 \\ Z_2 \end{bmatrix}$$

$K_{11}=Gap/\tan apl$
$K_{12}=-Gap/\sin apl$
$K_{22}=K_{11}$，$K_{21}=K_{12}$

積分定数マトリックス

$$\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} Z_1 \\ Z_2 \end{bmatrix}$$

$R_{11}=1$，$R_{12}=0$
$R_{21}=-1/\tan apl$
$R_{22}=1/\sin apl$

4．多層地盤の解析例

ここではFig-5のような4層地盤について解析を行った。解析の手順は次のとうりである。

1) 剛性マトリックスの重ねあわせを行う。
2) 1)より固有振動数方程式マトリックスを作成する。
3) 2)より固有振動数を求める。
4) 積分定数マトリックスを使って固有振動モードを計算する。
5) 入力波による応答波の計算を行う。

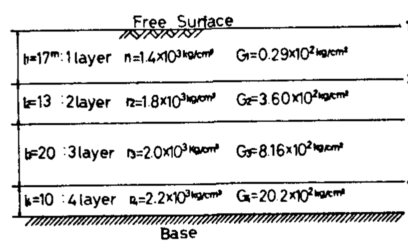

Fig-5

Fig-6には1次から4次までの振動モード型を示してある。またFig-7には10ᵐおきの深さにおける変位応答を示してある。なお入力波としては1968年の十勝沖地震加速度（NS成分）を選んだ。

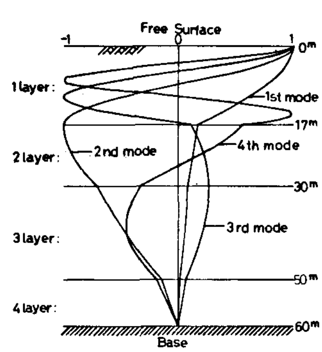

Fig-6

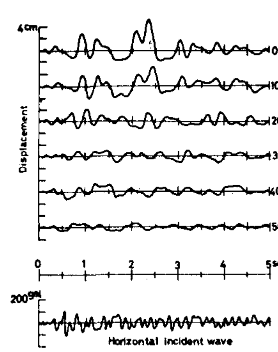

Fig-7

参考文献

土木学会論文報告集 第207号
1972年11月 P13