I-236　相互スペクトル，シミュレーション及び地震動主軸の概念について

武蔵工業大学　正員　星谷 勝

1. まえがき

重要且つ複雑な構造物の耐震安全性を検討するとき，2次元または3次元動的解析が必要となろう。この場合地震動の3方向成分（水平2成分，垂直成分）間の相関性，あるいは複数地点での波形の相関性を定量的に評価するためにはどのような量で表現したらよいであろうか？　本論は非定常確率過程として地震動をとらえ，ここに提案する相互スペクトル(Cross Spectrum)の有用性を示す。さらに，設計用複数波形のシミュレーション理論を提案するとともに，地震動主軸の概念を検討する。

2. 相互スペクトル

時間領域のみならず周波数領域においても非定常となる平均値0の多次元確率過程 $x_i(t)$; $i=1,2,\cdots,m$ の相関性をとらえるために相互スペクトルを次式で提案する。

$$A_i(\omega,t:W)=\int_{-\infty}^{\infty}W(t-u)x_i(u)e^{-i\omega u}du \quad として \quad S_{ij}(\omega,t:W)=E\left[\frac{1}{2\pi}A_i(\omega,t:W)A_j^*(\omega,t:W)\right]$$

ここで，$-\infty<t<\infty$，$-\infty<\omega<\infty$．$W(t)$はウインドウ関数で$t=0$の近傍で正値をとり，この近傍の外では$|W(t)|$は非常に小さいとする。さらに，$\int_{-\infty}^{\infty}W^2(t)dt=1$とする。

上式で定義した相互スペクトル $S_{ij}(\omega,t:W)$ は次のように変形される。

$f_i(t,u)=W(t-u)x_i(u)$，$f_j(t,u)=W(t-u)x_j(u)$ とおけば

$$S_{ij}(\omega,t:W)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\int_{-\infty}^{\infty}E\left[f_i(t,u+\tau/2)f_j(t,u-\tau/2)\right]du\right\}e^{-i\omega\tau}d\tau$$

したがって，相互スペクトルは次のように理解できよう。まず $x_i(u)$ および $x_j(u)$ を重み修正して時間tの近傍でとりだす。これを $f_i(t,u)$，$f_j(t,u)$ で表わし，その相互相関関数 $E[f_i(t,u+\tau/2)f_j(t,u-\tau/2)]$ を算出する。上記の｛　　｝内はこの相互相関関数をuに関して全積分したものである。したがって｛　　｝内は $x_i(u)$ と $x_j(u)$ の時間t近傍に於ける平均相互相関関数といえる。これをフーリエ変換（定常過程のときと同じ）により定義したものが相互スペクトルである。故に，時間tを順次移動させて $S_{ij}(\omega,t:W)$ を計算することで，非定常相互スペクトルが求められる。もし $i=j$ ならば $S_{ij}(\omega,t:W)$ は Physical Spectrum となる。

地震動記録に対して $S_{ij}(\omega,t:W)$ を計算すれば，波形の相互関連が明確にされよう。$S_{ij}(\omega,t:W)$ には次の性質；$S_{ij}(\omega,t:W)=S_{ji}^*(\omega,t:W)$ が証明されるので，相互スペクトル行列を作れば，エルミート行列となる。

3. シミュレーション

地震動の3成分間の相互スペクトル特性が解析され，その特徴を強調した相互スペクトルモデルが作成されたとする。このとき，このモデルを満足する3成分波形を作成し，3次元解析をしようとする場合，ここに述べる多次元非定常確率過程のシミュレーションが有用である。

相互スペクトル行列（要素$S_{ij}(\omega,t:W)$）が与えられたとき，これを満足する平均値0のm個の多次元非定常確率過程$x_i(t)$は次式でシミュレートできる。

$$x_i(t) = \sum_{p=1}^{i}\sum_{k=1}^{N} b_{ip}(\omega_k,t)\cos\{\omega_k t + \beta_{ip}(\omega_k,t) + \varphi_{pk}\} \quad ; i=1,2,\cdots,m$$

但し，(1) φ_{pk}は0から2π間で一様乱数とする。$p=q$且つ$k=l$以外のときはφ_{pk}とφ_{ql}は互に独立とする。(2) $b_{ip}(\omega,t)$及び$\beta_{ip}(\omega,t)$は次式で与えられる。すなわち，$4S_{ij}(\omega,t:W)\Delta\omega = \sum_{p=1}^{i} B_{ip}(\omega,t)B^{*}_{jp}(\omega,t) \ : i \leq j$と分解して$B_{ip}(\omega,t) = b_{ip}(\omega,t)\exp\{i\beta_{ip}(\omega,t)\}$と与える。(3) ω_kは相互スペクトルの円振動数ωの上限および下限値をそれぞれω_U，ω_Lとして，$\Delta\omega = (\omega_U - \omega_L)/N$ ：N＝十分に大きな正整数と分解したとき，$\omega_k = \omega_L + (k-1/2)\Delta\omega$で与えられる。(4). 本シミュレーション法では相互スペクトルが時間方向になだらかに変化するものとする。地震動に適用する場合には比較良好な結果が得られるものと考えられる。本シミュレーション理論の証明は省略する。

4. 地震動主軸

3成分の記録は地震計設置方向で測定される。したがって，相互スペクトル特性はこの地震計方向に関する波形の特徴をとらえることになる。地震は常に理想的な方向から襲来するとは限らない。もし地震波を3成分からなるベクトルと考え，これを座標変換により新しい軸方向でながめてみれば，相互スペクトルに関しても別の特徴が見出されるかもしれない。この意味から直交した地震計方向を座標変換してデータを見なおすことは有意義であり，多くの主軸の概念が考えられる。瞬間エネルギーを3成分がそれぞれ最大値，中間値，最小値となるような直交座標変換を行うことで主軸を提案すること[1]や全エネルギーに関して同じ考え方を適用すること[2]等が考えられる。瞬間エネルギーに関する方法では主軸の1つが地震源方向と一致するという報告もすでに発表されている[3]。

本論では相互スペクトル行列$\mathbb{S}(\omega,t) = \left[\, S_{ij}(\omega,t:W) \,\right]$の複素固有値問題として主軸を提案する。エルミート行列$\mathbb{S}(\omega,t)$の固有値問題；$\mathbb{S}\boldsymbol{l} = \lambda\boldsymbol{l}$を設定する。すると，実数固有値$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$およびそれぞれに対応する複素固有ベクトル$\boldsymbol{l}_1$，$\boldsymbol{l}_2$，$\boldsymbol{l}_3$が解析される。本論の主軸は座標変換行列$\mathbb{L} = \{\boldsymbol{l}_1^T, \boldsymbol{l}_2^T, \boldsymbol{l}_3^T\}^T$で主軸を定義する。この主軸に沿うように地震記録を変換すれば，$\boldsymbol{x}(t) = \{x_1(t), x_2(t), x_3(t)\}^T$の3成分記録は次のように複素関数$\boldsymbol{x}'(t)$と変換される；$\boldsymbol{x}'(t) = \mathbb{L}\,\boldsymbol{x}(t)$　rは要素で$x'_r(t) = \sum_{i=1}^{3} l_{ri}x_i(t)$。複素関数$x'_r(t)$の相互スペクトルを次式で定義する。

$$S'_{rs}(\omega,t:W) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} W(t-u_1)W(t-u_2)\,E[x'^{*}_r(u_1)x'_s(u_2)]\,e^{-i\omega(u_1-u_2)}\,du_1\,du_2$$

これに，$x'_r(t) = \sum_{i=1}^{3} l_{ri}x_i(t)$を代入し整理すれば

$$\mathbb{S}'(\omega,t) = \mathbb{L}^{*}\,\mathbb{S}\,\mathbb{L}^{T} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} ; \quad \lambda_i = \lambda_i(\omega,t)$$

となろう。すなわち，座標変換複素行列$\mathbb{L}$によって定義された主軸方向で，$\boldsymbol{x}'(t)$のω成分波は時間t近傍で互に独立した複素関数となる。地震動の本来的な特徴を調べるためには，この$\lambda_i(\omega,t)$の形状変化，複素主軸$\mathbb{L}$の虚数部の意味，複素波形成分$\boldsymbol{x}'(t)$の虚数部の検討が興味である。新らたな知見が得られるかもしれない。

文献(1). Kubo, T and Penzien, J ; Japan-U.S. Seminar, Hawaii, Aug. 1975　(2)星谷；才14回地震工学研究発表会，7月，1976年.　(3)柴田他；機械学会講演論文 No. 760-3，4月1976年