I-228　極値推定法による構造安全性の推定

名古屋大学　学生員　○馬場　俊介
岐 阜大学　正　員　　中川　建治
名古屋大学　正　員　　成岡　昌夫

1．はじめに　構造部材の信頼性解析では、部材強度、ならびに、部材に作用する外力が、それぞれ既知の確率分布で仮定されている。そして、これらの分布の重複部分の面積、すなわち、破壊確率 P_f が 10^{-4} ~ 10^{-6} という微小の値となるように設計を行なう。しかし、現実に得られるたかだか数十個の実測値から、それらの分布を正確に推定するなどということは、とりわけ、10^{-4} ~ 10^{-6} に相当する分布裾野部の微小区間を精度良く推定することは不可能に近い。本研究では、これらの不確実性が入り込まないように、分布の仮定を必要としない安全性の判定法について述べる。すなわち、変分法に基づき、破壊確率を極大化するような性質を有する分布を求め、強度と作用外力（部材力）についてのこれらの分布の重複部分が所期の破壊確率と一致したときを、設計の基準とする。これにより、任意の信頼度水準が最低限保証されるような設計が可能となろう。

2．極値推定法　実際の標本抽出（測定）によって得られる n 個の標本値から種々の特性を求め、これらの特性値を、求めようとする分布に対する拘束条件とする。標本の属する母集団から新たに N（$>n$）個の標本をくり返し抽出するときの、その各くり返しごとの最大値の平均値 Y というものを定義し、この Y を極大化するように変分法に基いて分布 $X(F)$ を決定する。

測定値 x_i（$i=1,\cdots,n$）からの拘束条件としては、一般性ということを考慮して、① $\int_0^1 X\,dF=0$（平均値），② $\int_0^1 X^2 dF=1$（分散），③ $\int_0^1 XF\,dF=\gamma_1$，④ $\int_0^1 XF^2 dF=\gamma_2$，⑤ $\int_0^1 XF^3 dF=\gamma_3$，⑥ $\int_0^1 XF^4 dF=\gamma_4$ の6つを考える。ここに、X は x の正規化値である。また、先に述べたように、つぎのような Y を定義する。

$$Y = \int_0^1 XNF^{N-1}\,dF \tag{1}$$

拘束条件①～⑥を満たし、かつ、式(1)の Y を極大化するような $X(F)$ は、未定係数 λ_1 ~ λ_6 を導入して、$J = XNF^{N-1} - \lambda_1 X - \lambda_2 XF - \lambda_3 XF^2 - \lambda_4 XF^3 - \lambda_5 XF^4 - \lambda_6 X^2$ とした場合、$\partial J/\partial X = 0$ とおくことにより、

$$X = (1/2\lambda_6)(NF^{N-1} - \lambda_1 - \lambda_2 F - \lambda_3 F^2 - \lambda_4 F^3 - \lambda_5 F^4) \tag{2}$$

となる。式(2)を拘束条件①,③～⑥に代入し、λ_1 ~ λ_5 に関する連立方程式をたてると、つぎのようになる。

$$[A]\{\lambda\} = \{N\} - 2\lambda_6\{\gamma\} \tag{3-1}$$

ここに、
$$\{\lambda\}^T = \{\lambda_1\ \lambda_2\ \lambda_3\ \lambda_4\ \lambda_5\}$$
$$\{N\}^T = \{1\ \tfrac{N}{N+1}\ \tfrac{N}{N+2}\ \tfrac{N}{N+3}\ \tfrac{N}{N+4}\}$$
$$\{\gamma\}^T = \{0\ \gamma_1\ \gamma_2\ \gamma_3\ \gamma_4\}$$
$$[A] = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 & 1/4 & 1/5 \\ & 1/3 & 1/4 & 1/5 & 1/6 \\ & & 1/5 & 1/6 & 1/7 \\ \text{sym.} & & & 1/7 & 1/8 \\ & & & & 1/9 \end{bmatrix}$$

である。これを解いて $\{\lambda\}$ が得られる。また、$\{\lambda\}$ を拘束条件②に入れることにより、λ_6 を得ることができる。

$$\{\lambda\} = [A]^{-1}\{N\} - 2\lambda_6[A]^{-1}\{\gamma\} \qquad 2\lambda_6 = \left[\tfrac{N^2}{2N-1} - \{N\}^T[A]^{-1}\{N\}\right]^{1/2} \Big/ \left[1 - \{\gamma\}^T[A]^{-1}\{\gamma\}\right]^{1/2} \tag{3-2}$$

さらに、Y は式(3-2)を用いて、つぎのように表わされる。

$$Y = \left[\tfrac{N^2}{2N-1} - \{N\}^T[A]^{-1}\{N\}\right]^{1/2}\left[1 - \{\gamma\}^T[A]^{-1}\{\gamma\}\right]^{1/2} + \{N\}^T[A]^{-1}\{\gamma\} \tag{4}$$

式(4)により、任意に N, γ_1, γ_2, γ_3 が与えられたときの平均最大値 Y の極大値を得ることができる。なお、拘束条件⑥は、$X(F)$ が至る所で傾き正となるように、すなわち、確率分布関数として有意であるように強制的に修正するための項である。

3．γ_i の推定　測定値として得られる n 個の順序統計量 X_i を用いて γ_1 ~ γ_3 を推定するには、

$$\gamma_1 = \{1/n(n+1)\}\sum iX_i\ ,\quad \gamma_2 = \{1/n(n+1)(n+2)\}\sum i(i+1)X_i\ ,\quad \gamma_3 = \{1/n(n+1)(n+2)(n+3)\}\sum i(i+1)(i+2)X_i$$

とすると、平均値の意味で、最も合理的な特性値 γ_i が得られる。

4. 破壊確率と極大化との関連性

式(1)で定義されたYは、$O(1/N^2)$のオーダーの誤差で、

$$Y' = \int_0^1 X\,\psi(F)\,dF \qquad ,\ \psi(F) = 1/p\ (1-p \le F \le 1) \qquad \text{あるいは} \qquad \psi(F) = 0\ (0 \le F < 1-p) \tag{1'}$$

と等しい。ただし、$p = 2/N$ という関係にある。この式(1')のY'は、近似的に破壊確率P_fを極大化するという性質を有している。すなわち、一定のP_fを実現させるような$X(F)$として、部材強度としてはY'を極小化するようなX(F)を、部材力としてはY'を極大化するようなX(F)を使ったときの組合せが、中央安全率(部材強度と部材力の平均値どおしの比)を最大にするものである。換言すると、もしY'(従って、Y)が部材強度と部材力に対する設計基準として選ばれるならば、その破壊確率は最大でも$P_f \approx p^2$となる。

5. 設計基準

部材強度に対しては、下側破壊確率が最悪でもp以下となるようなY_Rを求める。一方、部材力に対しては、上側破壊確率が最悪でもp以下となるようなY_Sを求める。部材強度の平均値、分散をμ_R, σ_R^2、部材力の平均値、分散をμ_S, σ_S^2とすると、Y_R, Y_Sを用いて、

$$\mu_R - Y_R\sigma_R \ \ge\ \mu_S + Y_S\sigma_S \tag{5}$$

となるように設計を行なうならば、この設計により部材に予期せぬ破壊が生ずる可能性は常にp^2以下となる。

このように実現された設計は、数学的に(変分原理の上から)創り出される最も危険な状態に対して所期の破壊確率が保証されているという意味で、1つの限界値を与えるものであり、安全性に対する有力な判断基準だと思われる。

6. 計算例

部材強度としては、日本鋼構造協会による鋼材引張強度試験、名古屋大学工学部における鋼材座屈強度試験、日本セメント技術協会によるセメント圧縮強度試験の各結果を、部材力としては、日本道路公団による軸重計記録をトラス橋に仮想自動車列として作用させたときの1週間ごとの最大値を集めたものを、標本値Xとした。各標本ごとの特性値を、表-1に、また、これらの特性値に対して計算されたYを、図-1に示す。

measured values	n	μ	σ	cov	Y_1	Y_2	Y_3
steel tension (SM50B) [t/cm²]	48	5.377	0.05599	0.01041	0.2592	0.2598	0.2386
steel tension (SM41B) [t/cm²]	21	2.752	0.1161	0.04218	0.2641	0.2529	0.2195
steel buckling (n=47) [t/cm²]	47	1.259	0.1462	0.1162	0.2696	0.2853	0.2619
steel buckling (n=48) [t/cm²]	48	1.252	0.1538	0.1229	0.2786	0.2859	0.2636
cement compression [t/cm²]	56	0.3904	0.01076	0.02757	0.2771	0.2848	0.2634
truss chord member [t]	31	14.44	1.9220	0.1331	0.2707	0.2781	0.2570

表-1 種々の測定値の特性値

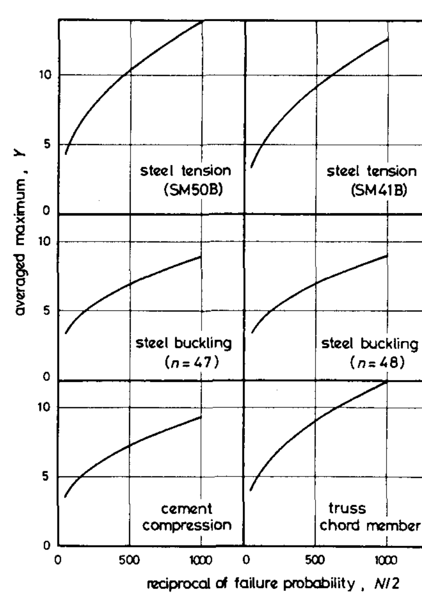

図-1 N/2 (1/p) - Y 曲線

図-1を使い、実際のトラス橋の弦材の部材必要断面積の決定を試みたが、その結果、従来の許容応力設計で必要とされる断面よりは小さいが、それほど変わらない断面を得た。

7. むすび

信頼性設計とは全く別の観点から、確率的な考え方に立脚する1つの設計概念を提案した。これは、設計に対する数学的保証を与えているという意味で、有効な基準だと思われる。

8. 参考文献

1) Gumbel, E.J. : Statistics of Extremes, Columbia University Press, 1950.

2) 馬場、中川、成岡 : 実験値に基く条件付き最小値の推定法に関する基礎的研究, 建築学会論文報告集, 233, 1975, pp. 13-19.