

長崎大学 工学部 正員 岡林隆敏

1. 序論 土木構造物に作用する多くの外力は、地震外力、風荷重、波浪による荷重のように再現性のない不規則な荷重である。さらに、地震動は振幅の包絡線ばかりでなく、その周期が時間とともに変化する非定常確率過程とみなされている。近年、非定常パワースペクトラム分析理論の発展にともなう、地震動の非定常性が明らかになりつつある。従来このような非定常外力が作用した構造物系の応答解析は、非定常外力を振幅の包絡線と示す形状関数に特定のパワースペクトラムをもつ定常過程の積と見なしていた。しかし、この解析では、外力の周波数特性の時間変化が応答に及ぼす影響を考慮できない。著者等は、すでに複雑な非定常外力に対する分散、共分散応答が、共分散方程式を用いて容易に解析できることを示したが⁽⁶⁾、本研究では、一般的な非定常外力が作用する構造物系の分散、共分散応答解析のための基礎式を誘導した。さらに地震動としてはELCENTRO-1940 NSを用いてこのモデル化を行い⁽⁷⁾、構造物系を1自由度系に仮定して共分散方程式より応答の分散、共分散を求め、シミュレーションによりこの解析の妥当性を検討した。

2. 外力のモデル化 非定常パワースペクトラムの理論によると、非定常確率過程は狭帯域の周波数特性をもつ互に独立な定常過程が、その各成分の時間変化を示す時間関数、すなわち形状関数で変調された関数の和として表現される。ところで、狭帯域定常過程は白色雑音過程が狭帯域フィルター系に作用して得られたものと考えられる、さらにフィルター系は通常常微分方程式で記述され、定常過程はこの定常解過程となる。非定常過程をベクトルとして、一般的に記述すると、これは次式になる。
$$\dot{Y}(t) = G(t)Y(t) + N(t) \quad (1)$$

$$Y(t \rightarrow \infty) = B^{-1}N(t) \quad (2)$$
 ただし、 $Y(t)$ ； n 次元非定常過程ベクトル、 $G(t)$ ； $(n \times n)$ の形状関数行列、 $N(t)$ ； m 次元の特定のパワースペクトラムを有する定常過程ベクトル、 B ； $Y(t)$ の特性を決定するフィルター系の (m) の係数行列、 $N(t)$ ； m 次元の互に独立な白色雑音過程ベクトル。地震動のモデル化を行うために、次のようなパワースペクトラムを持つ定常過程を考える。
$$S_{g_i}(\omega) = 2\sigma_i^2 \beta_i (\beta_i^2 + \Omega_i^2 + \omega^2) / \{ (\beta_i^2 + \Omega_i^2 + \omega^2)^2 + 4\beta_i^2 \omega^2 \} \quad (3)$$
 これは、次のフィルター方程式の定常解過程のパワースペクトラムである。
$$\ddot{g}_i + 2\beta_i \dot{g}_i + (\beta_i^2 + \Omega_i^2) g_i = \eta_i(t) \quad (4-1)$$

$$g_i(t) = \eta_i \sqrt{\beta_i} / (\beta_i^2 + \Omega_i^2) \quad (4-2)$$

ただし、 η_i 、 β_i 、 Ω_i はフィルターのパラメーター、 $\eta_i(t)$ ；平均値が0、分散 σ_i^2 の白色雑音過程。ここで、地震動のモデルとして、次の2種を考える。(i) NO.1 モデル $f(t) = g(t) \sum_{i=1}^N g_i(t)$ N 個の狭帯域過程より、パワースペクトラムのピークが N 個ある定常過程を構成し、各々が平均化された形状関数 $g(t)$ で変調される場合。(ii) NO.2 モデル $f(t) = \sum_{i=1}^N g_i(t) g_i(t)$ NO.1と同じく N 個の定常過程を構成し、形状関数 $g_i(t)$ としては、地震波形の周波数成分をもつエネルギー包絡線を考え、各々の積を合成した場合、このモデルの周波数特性は時間とともに変化する。図-1、図-2、図-3に実際の波形によるパワースペクトラムおよびNO.1、NO.2モデルによるパワースペクトラム。

3. 基礎方程式の誘導 一般に、構造物系の運動方程式は次式で記述される。

$$\dot{X}(t) = A(t)X(t) + F(t) \quad (5)$$
 ただし、 $X(t)$ ； n 次元変数ベクトル、 $F(t)$ ； n 次元外力ベクトル、 $A(t)$ ； $(n \times n)$ の係数行列。2で示したように非定常外力は(1)式と(2)式で構成される。(1)、(2)、(5)式は一つの系、すなわち構造物・フィルター系と考えると、次のような変数 $Z(t)$ を用いて一つの運動方程式で表現される。

$$\dot{Z}(t) = H(t)Z(t) + Q(t) \quad (6)$$
 ただし、 $Z(t)$ 、 $H(t)$ 、 $Q(t)$ は次式で示される。

$$Z(t) = \begin{bmatrix} X(t) \\ Y(t) \end{bmatrix} \quad (7-1) \quad H(t) = \begin{bmatrix} A(t) & G(t) \\ 0 & B \end{bmatrix} \quad (7-2) \quad Q(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ N(t) \end{bmatrix} \quad (7-3)$$

$\mathbb{Z}(t)$ の共分散行列を $R_{\mathbb{Z}}(t)$ とすると、⑥に対応する共分散方程式は次式になる。

$$R_{\mathbb{Z}}(t) = H(t) R_{\mathbb{Z}}(t) + R_{\mathbb{Z}}(t) H(t)^T + S_{\mathbb{Z}} \quad (8)$$

$S_{\mathbb{Z}}$ は $Q(t)$ の共分散行列である。ただし、 $R_{\mathbb{X}}(t)$ 、 $R_{\mathbb{Y}}(t)$ は各々 $\mathbb{X}(t)$ 、 $\mathbb{Y}(t)$ に関する共分散行列であり、対称行列、 $R_{\mathbb{X}\mathbb{Y}}(t)$ 、 $R_{\mathbb{Y}\mathbb{X}}(t)$ は $\mathbb{X}(t)$ と $\mathbb{Y}(t)$ に関する共分散行列であり、互に転置である。さらに、フィルタ系の方程式により、この式に対応する共分散方程式は次式になる。

$$R_{\mathbb{Z}}(t) = \begin{bmatrix} R_{\mathbb{X}}(t) & R_{\mathbb{X}\mathbb{Y}}(t) \\ R_{\mathbb{Y}\mathbb{X}}(t) & R_{\mathbb{Y}}(t) \end{bmatrix} \quad (9)$$

$$\dot{R}_{\mathbb{Z}}(t) = B R_{\mathbb{Z}}(t) + R_{\mathbb{Z}}(t) B^T + S_{\mathbb{Z}} \quad (10)$$

ここで、フィルタ系の応答は定常過程であるので、上式の微分方程式は $\dot{R}_{\mathbb{Z}}(t) = 0$ となって、代数的方程式となる。この条件と、特定の初期条件より⑩を数値計算することにより解が得られる。ここで求める量は、構造物系応答 $\mathbb{X}(t)$ の共分散 $R_{\mathbb{X}}(t)$ であるので、⑩式を書き改めて、次の基礎方程式を得る。

$$R_{\mathbb{X}}(t) = A(t) R_{\mathbb{X}}(t) + R_{\mathbb{X}}(t) A(t)^T + G(t) R_{\mathbb{Y}\mathbb{X}}(t) + R_{\mathbb{X}\mathbb{Y}}(t) G(t)^T \quad (11-1)$$

$$R_{\mathbb{X}\mathbb{Y}}(t) = A(t) R_{\mathbb{X}\mathbb{Y}}(t) + R_{\mathbb{X}\mathbb{Y}}(t) B^T + G(t) R_{\mathbb{Y}}(t)^T \quad (11-2)$$

$$\text{フィルタ条件} \quad B R_{\mathbb{Y}}(t) + R_{\mathbb{Y}}(t) B^T + S_{\mathbb{Y}} = 0 \quad (11-3)$$

$$\text{初期条件} \quad R_{\mathbb{X}}(t) = 0 \quad R_{\mathbb{X}\mathbb{Y}}(t) = 0 \quad (11-4)$$

4. 計算例 構造物系を1自由度系と仮定すると、運動方程式は次式になる。ただし、 δ ; 減衰定数、 ω ; 固有円振動数。外力モデルとして No. 2 を用いて、構造物・フィルタ系を状態空間で記述すると次式を得る。ただし、 $X_1 = x$ 、 $X_2 = \dot{x}$ 、他の X_i はフィルタ系に関する変数である。

$$\dot{X}_1 = X_2$$

$$\dot{X}_2 = -2\delta\omega X_2 - \omega^2 X_1 + \sum_{i=1}^N g_i(t) \sqrt{\beta_i} (-X_{2i+2} + \sqrt{\beta_i} \Omega_i^2 X_{2i+1})$$

$$X_{2i+1} = X_{2i+2}$$

$$\dot{X}_{2i+2} = 2\beta_i X_{2i+2} - (\beta_i^2 + \Omega_i^2) X_{2i+1} + n_i(t)$$

上式に対応する共分散方程式は次式で与えられるが、この中で構造物系に関する値は $E[X_1^2]$ 、 $E[X_1 X_2]$ 、 $E[X_2^2]$ である。

$$\dot{E}[X_1^2] = 2 E[X_1 X_2]$$

$$\dot{E}[X_1 X_2] = -\omega^2 E[X_1^2] - 2\delta\omega E[X_1 X_2] + \sum_{i=1}^N g_i(t) \sqrt{\beta_i}$$

$$\left. \begin{aligned} & \cdot (\beta_i^2 + \Omega_i^2) E[X_1 X_{2i+1}] - E[X_1 X_{2i+2}] + E[X_2^2] \\ & \dot{E}[X_2 X_{2i+1}] = E[X_2 X_{2i+2}] + E[X_2 X_{2i+1}] \\ & \dot{E}[X_2 X_{2i+2}] = -(\beta_i^2 + \Omega_i^2) E[X_2 X_{2i+1}] - 2\beta_i E[X_2 X_{2i+2}] + E[X_2 X_{2i+2}] \\ & \dot{E}[X_2 X_{2i+1}] = -\omega^2 E[X_2 X_{2i+1}] - 2\delta\omega E[X_2 X_{2i+1}] \\ & \quad + E[X_2 X_{2i+1}] + \Omega_i g_i(t) / 2 \sqrt{\beta_i} (\beta_i^2 + \Omega_i^2) \\ & \dot{E}[X_2 X_{2i+2}] = -\omega^2 E[X_2 X_{2i+2}] - 2(\delta\omega + \beta_i) E[X_2 X_{2i+2}] \\ & \quad - (\beta_i^2 + \Omega_i^2) E[X_2 X_{2i+1}] - \Omega_i g_i(t) / 2 \sqrt{\beta_i} \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

(参考文献) ① 藤田弘行 1975.3, 土木学会誌, ② 星谷勝 1975.3, 土木学会誌, ③ 岡林, 土木学会30周年記念論文集, ④ 岡林, 昭和44年度 西部支部講演集

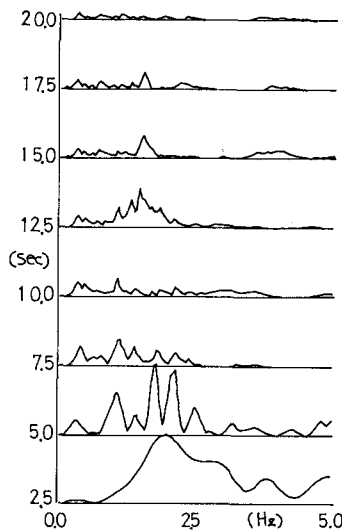


図-1 非定常パワースペクトラム

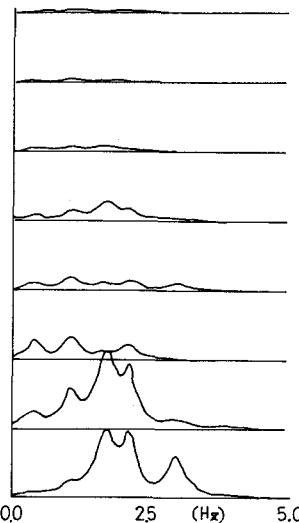


図-2 No.2モデルの非定常パワースペクトラム

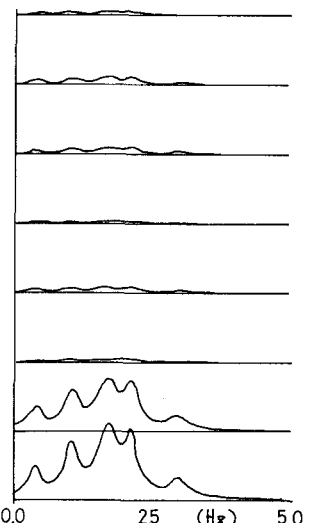


図-3 No.1モデルの非定常パワースペクトラム