

広島工業大学 正員 中山 隆弘
大阪大学工学部 正員 小松 定夫

1. まえがき 不規則振動問題における強度超過率*および初通過確率(*first-passage probability*)は、地震、風、波などに対する構造物の動的信頼性を示す1つの指標である。これらの値を決定する最も主要な因子は、もちろん静的信頼性理論において中央安全率と呼ばれている因子に相当する、強度の平均値と応力の *r.m.s.* 値との比であるが、筆者等は昨年度の年次講演会において、この点と、強度のばらつきを示す変動係数 δ_s が共に大きな値をとるような条件下では、この δ_s が強度超過率および初通過確率を決定する重要な因子になることを、定常正規不規則振動体に対する計算結果に基づき、定量的に指摘した。¹⁾ さらにその詳細を文献²⁾において報告した。今回は同様の視点から、非定常正規不規則振動体の強度超過率等と強度のばらつきとの関係を検討した結果について述べ、さらに載荷試験等のいわゆる *proof load test* による“信頼性向上効果”^{2), 3), 4)}に関する若干の考察を付け加える。

2. 基礎式 非定常不規則外力を受ける構造物のある主要な点に生ずるある種の応力の変動過程 $x(t)$ およびその導関数 $\dot{x}(t)$ は共に確率過程である。 $x(t)$ 、 $\dot{x}(t)$ の分散および両者の相関係数をそれぞれ $\sigma_x^2(t)$ 、 $\sigma_{\dot{x}}^2(t)$ 、 $\rho_{x\dot{x}}(t)$ とし、さらに応力に対応する材料強度を S とすれば、 $x(t)$ の S に対する強度超過率が以下のように誘導される。なお文中の太文字は変数が確率変数であることを示す。いま $x(t)$ が正規過程であるとすれば、若干の計算によって、単位時間 dt に $x(t)$ があるレベル a を超過する確率が次式のように導かれる。

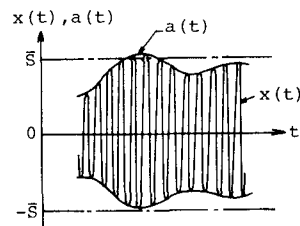


図1 応答及びその導関数が強度を超過する現象の概略図

$$P[x(t+dt) \geq a \cap x(t) < a] = \frac{dt}{2\pi} \frac{\sigma_{\dot{x}}(t)}{\sigma_x(t)} \exp\left\{-\frac{a^2}{2\sigma_x^2(t)}\right\} \left[\sqrt{1-\rho_{x\dot{x}}^2(t)} \exp\left\{-\frac{\rho_{x\dot{x}}^2(t)a^2}{2\sigma_x^2(t)(1-\rho_{x\dot{x}}^2(t))}\right\} + \frac{\sqrt{2}\rho_{x\dot{x}}(t)a}{\sigma_x(t)} \operatorname{Erf}\left\{-\frac{\rho_{x\dot{x}}(t)a}{\sqrt{2}\sigma_x(t)\sqrt{1-\rho_{x\dot{x}}^2(t)}}\right\} \right] \quad (a)$$

式中 $\operatorname{Erf}(z) = \int_z^\infty e^{-t^2} dt$ である。 S と $x(t)$ が互いに独立な確率変数であるとすれば、式(a)を用いて、直ちに $x(t)$ が正の符号をもつ強度を下側から超過する強度超過率 $ns_1^+(t)$ の算定式として次式が得られる。

$$ns_1^+(t) = \frac{1}{2\pi} \frac{\sigma_{\dot{x}}(t)}{\sigma_x(t)} \int_0^\infty f_S(s) \exp\left\{-\frac{s^2}{2\sigma_x^2(t)}\right\} \left[\sqrt{1-\rho_{x\dot{x}}^2(t)} \exp\left\{-\frac{\rho_{x\dot{x}}^2(t)s^2}{2\sigma_x^2(t)(1-\rho_{x\dot{x}}^2(t))}\right\} + \frac{\sqrt{2}\rho_{x\dot{x}}(t)s}{\sigma_x(t)} \operatorname{Erf}\left\{-\frac{\rho_{x\dot{x}}(t)s}{\sqrt{2}\sigma_x(t)\sqrt{1-\rho_{x\dot{x}}^2(t)}}\right\} \right] ds \quad (1)$$

式中 $f_S(s)$ は強度の確率密度関数である。次に初通過確率 $P_1(t)$ については、強度の大きさが正負共に等しいものとし、かつ応力が強度を超過する現象が互いに独立であるとすれば (いわゆる *Poisson* 近似),

$$P_1(t) = 1 - \exp\left\{-2 \int_0^t ns_1^+(\tau) d\tau\right\} \quad (2)$$

ただし式(2)は、設計上、安全側の値を与えるにせよ、応力と強度が接近しているとき(すなわち δ_s が小さいとき)には、精度が非常に落ちることは周知の通りである。この欠陥を補う方法が、応力の包絡線 $a(t)$ の強度超過率による初通過確率の算定法であるが、この方法による結果については講演当日申し述べたい。

さて強度の平均値、標準偏差をそれぞれ $\bar{S}$, σ_s とするとき、強度の下限および上限がそれぞれ $S_L = \bar{S} - K_L \sigma_s$, $S_U = \bar{S} + K_U \sigma_s$ (K_L , K_U は定数)と保証される場合を想定し、このときの強度超過率の算定式を式(1)より導けば以下ようになる。ただし式(3), (4)はそれぞれ $f_S(s)$ が条件付正規分布および条件付対数正規分布により表わされる場合の算定式である。また $\bar{x}(t) = \bar{S}/\sigma_x(t)$, $\delta_s = \sigma_s/\bar{S}$ である。

* 前回の報告¹⁾における「期荷横断率」と同一であるが、本研究の対象が構造物の動的信頼性であることをより明確にするため、本報告では「強度超過率」と呼ぶ。

$$ns_{\alpha, cn}^+(t) = \frac{\sigma_x(t)}{2\pi\sigma_x(t)} \left\{ \text{Erf}\left(-\frac{K_e H}{\sqrt{2}}\right) - \text{Erf}\left(\frac{K_u H}{\sqrt{2}}\right) \right\} \left[\frac{1 - P_{xx}(t)}{\sqrt{(1 - P_{xx}(t)) + \bar{m}(t)\delta_s^2}} \exp\left\{-\frac{\bar{m}(t)}{2((1 - P_{xx}(t)) + \bar{m}(t)\delta_s^2)}\right\} \left[\text{Erf}\left(\frac{\alpha_e}{\sqrt{2}}\right) - \text{Erf}\left(\frac{\alpha_u}{\sqrt{2}}\right) \right] \right. \\ \left. + \frac{P_{xx}(t)}{\bar{m}(t)\delta_s} \int_{(1 - \delta_s K_e)\bar{m}(t)}^{(1 + \delta_s K_u)\bar{m}(t)} \frac{1}{\sqrt{(1 - P_{xx}(t)) + \bar{m}(t)\delta_s^2}} \exp\left\{-\frac{(1 + \bar{m}(t)\delta_s^2)Z^2 - 2\bar{m}(t)Z + \bar{m}(t)}{2\bar{m}(t)\delta_s^2}\right\} \text{Erf}\left[-\frac{P_{xx}(t)}{\sqrt{2(1 - P_{xx}(t))}}Z\right] dZ \right] \quad (3)$$

式中

$$\alpha_e = \frac{\bar{m}(t)\delta_s - \{(1 - P_{xx}(t)) + \bar{m}(t)\delta_s^2\}K_e}{\sqrt{(1 - P_{xx}(t))\{(1 - P_{xx}(t)) + \bar{m}(t)\delta_s^2\}}}, \quad \alpha_u = \frac{\bar{m}(t)\delta_s + \{(1 - P_{xx}(t)) + \bar{m}(t)\delta_s^2\}K_u}{\sqrt{(1 - P_{xx}(t))\{(1 - P_{xx}(t)) + \bar{m}(t)\delta_s^2\}}}$$

$$ns_{\beta, cn}^+(t) = \frac{\sigma_x(t)\sqrt{1 - P_{xx}(t)}}{2\sqrt{2}\pi\sqrt{\ln(1 + \delta_s^2)}\sigma_x(t)} \left\{ \text{Erf}\left(\frac{\beta_e H}{\sqrt{2}}\right) - \text{Erf}\left(\frac{\beta_u H}{\sqrt{2}}\right) \right\} \left[\frac{1}{\sqrt{(1 - K_e\delta_s)\bar{m}(t)}} \frac{1}{Z} \exp\left\{-\frac{1}{2} \left[\frac{Z^2}{1 - P_{xx}(t)} + \frac{(\ln(\sqrt{1 - \delta_s^2}Z) - \ln\bar{m}(t))^2}{\ln(1 + \delta_s^2)} \right] \right\} \right. \\ \left. + \frac{\sqrt{2}P_{xx}(t)}{\sqrt{1 - P_{xx}(t)}} \int_{(1 - K_e\delta_s)\bar{m}(t)}^{(1 + K_u\delta_s)\bar{m}(t)} \frac{1}{\sqrt{(1 - K_e\delta_s)\bar{m}(t)}} \exp\left\{-\frac{1}{2} \left[Z^2 + \frac{(\ln(\sqrt{1 - \delta_s^2}Z) - \ln\bar{m}(t))^2}{\ln(1 + \delta_s^2)} \right] \right\} \text{Erf}\left[-\frac{P_{xx}(t)}{\sqrt{2(1 - P_{xx}(t))}}Z\right] dZ \right] \quad (4)$$

式中

$$\beta_e = \frac{\ln\{(1 - K_e\delta_s)\sqrt{1 + \delta_s^2}\}}{\sqrt{\ln(1 + \delta_s^2)}}, \quad \beta_u = \frac{\ln\{(1 + K_u\delta_s)\sqrt{1 + \delta_s^2}\}}{\sqrt{\ln(1 + \delta_s^2)}}$$

3. 数値計算結果と考察 $\sigma_x(t)/\sigma_x(t)$ の値を 2π に固定し, $P_{xx}(t), \bar{m}(t), \delta_s$ の値を種々変えて, 式(3), (4)により算出した強度超過率の計算結果の一部を図2~図6に示す。図2は式(3)に含まれる定積分Iの上, 下限をそれぞれ $\infty, -\infty$ とした場合の Gauss の公式による積分値の収束性を示したものであるが, δ_s が 0.05 の場合には 0.10 の場合に比べ, かなり収束性が悪いことがわかる。図3は強度が無条件正規分布するものとしたときの強度超過率と $\bar{m}(t)$ との関係を示す。 $\bar{m}(t)$ が大きくなるのに伴い, 強度を確定量とした結果との差異が著しくなることは明瞭であり, δ_s が強度超過率の値を左右する重要な因子であることを実証している。図4, 図5はそれぞれ強度の確率分布型および $P_{xx}(t)$ の影響を示したものである。さて前述のように *proof load test* を行えば, その後の構造物の信頼度は, それ以前に(例えば設計の時点)で推定した信頼度よりも当然向上することが期待される。図6はこの信頼性向上効果を

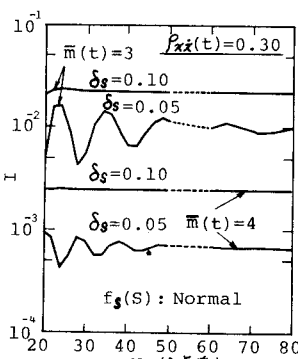


図2 数値積分の収束性

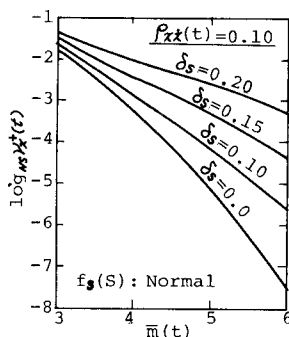


図3 $\bar{m}(t) \sim cn(t)$ 曲線

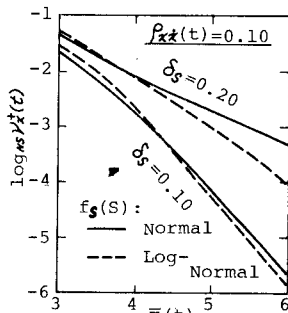


図4 強度の確率分布型による $cn(t)$ の比較

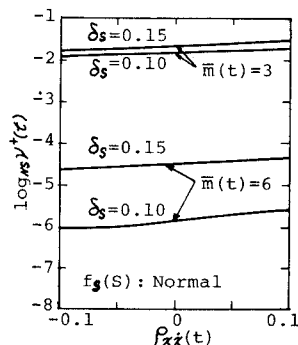


図5 $P_{xx}(t)$ による $cn(t)$ の変動性状

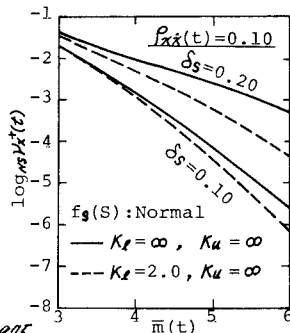


図6 信頼性向上効果

4. まとめ 非定常過程の破壊確率及び卓越過程の強度超過率, 破壊確率の計算結果については講演当日報告する予定である。

<参考文献>

- 1) 小松・中山: 不規則振動問題における *first-passage probability* について, 昭50年度年報
- 2) 小松・中山: 材料強度のばらつきを考慮して, 土木学会論文報告集, No.250, 1976.6.
- 3) 小池・豊田: 荷重履歴による強度劣化に伴う, 土木学会論文報告集 No.228, 1974.8.
- 4) Konishi, Kitagawa, Kitagawa: Reliability approach in structural eng. PP.91~110, Maruzen, 1975
- 5) Yang: First-excursion probability, Jour. of Sound & Vibration, Vol.27, No.2, 1973