

九州大学 ○学生員 藤岡 健三
正員 太田 俊昭

1. まえがき

構造部材としての鋼材の占める比重は大きく、その効果的使用は、今後とも構造界の重要なテーマであることは、言うまでもない。この為鋼材の終局耐力、特に塑性力学特性の解明に関する研究が、近年特に活発に行なわれるようになってきたが、ねじり外力を受ける鋼材の弾塑性挙動に関する体系的研究は、いまだ少ないようである。著者らは、この分野に関する一連の理論的研究を試みて来たが、本研究では、軟鋼材の特性である歪硬化の影響について、正方形太肉断面や、薄肉箱形断面を有する棒を対象にして、理論的実験的考察を試みることにする。

2. 応力とひずみ

図-1のように、軸軸まわりにねじりモーメント T を受ける一様な棒の応力状態を想定すれば、 $\sigma_x, \tau_{zx}, \tau_{zy}$ が働らくゆえ降伏関数 F は σ_x を相当応力として、次の式で与えられる。

$$F = (\sigma_x^2 + 3\tau_{zy}^2 + 3\tau_{zx}^2)^{1/2} - \sigma_c \quad \text{----- (1)}$$

一般に、応力とひずみ式は Reuss の式を用い、増分形式で表わすと次の式で与えられる。⁶⁾

$$\dot{\sigma}_x = E \dot{\epsilon}_x - \frac{2}{3} \sigma_x \dot{\lambda}, \quad \dot{\tau}_{zy} = G \dot{\gamma}_{zy} - 2 \tau_{zy} G \dot{\lambda}, \quad \dot{\tau}_{zx} = G \dot{\gamma}_{zx} - 2 \tau_{zx} G \dot{\lambda} \quad \text{----- (2)}$$

式(1)の増分 $dF = 0$ を求め、式(2)を代入し、 $\dot{\lambda}$ について解いて整理すれば、歪硬化係数を H' として、 $\dot{\lambda}$ が次の式のように求められる。

$$\dot{\lambda} = \frac{\frac{3E}{2\sigma_c^2} \left(\sigma_x \dot{\epsilon}_x + \frac{3G}{E} (\tau_{zx} \dot{\gamma}_{zx} + \tau_{zy} \dot{\gamma}_{zy}) \right)}{H' + \frac{1}{\sigma_c^2} \{ E \sigma_x^2 + 9G (\tau_{zx}^2 + \tau_{zy}^2) \}} \quad \text{----- (3)}$$

3-I. 太肉断面を有する棒

ねじり率増分 $\dot{\theta}$ 、ゆがみ関数 ϕ とすると、一般にせん断ひずみ増分は、次の式で与えられる。

$$\dot{\gamma}_{zy} = \frac{\partial \phi}{\partial y} + \dot{\theta} x, \quad \dot{\gamma}_{zx} = \frac{\partial \phi}{\partial x} - \dot{\theta} y \quad \text{----- (4)}$$

式(4)を、各々 x, y で偏微分し、ゆがみ関数 ϕ を消去し、ねじりの応力関数 ϕ を導入すれば、次の式を与える。

$$\dot{\phi}_{xx} + \dot{\phi}_{yy} + 2G \left\{ \frac{\partial}{\partial x} (\dot{\lambda} \phi_x) + \frac{\partial}{\partial y} (\dot{\lambda} \phi_y) \right\} = -2\dot{\theta} G \quad \text{----- (5)}$$

よつて式(5)を、差分法を使用して行列表示すると、応力関数行列 Φ として(6)式を与える。一方、ねじりモーメント増分 $\dot{T}$ が式(7)のように求められる。ただし式中、 A, D ; 断面形状による係数行列、 B ; 要素1なる行列行列、 C ; 塑性項よりなる行列行列である。また、断面を一边の長さ a の正方形格子に分割するものとする。

$$A \Phi = 2a^2 \dot{\theta} B + C \quad \text{----- (6)}$$

$$\dot{T} = 2 \iint \phi \, dx \, dy = D \Phi \quad \text{----- (7)}$$

よつて、式(4)式(5)より、ねじり率 $\dot{\theta}$ は次の式で与えられる。

$$\dot{\theta} = (\dot{T} - D A^{-1} C) / 2a^2 G D A^{-1} B \quad \text{----- (8)}$$

ただし、この時、 $\tau_{zy} = -\frac{\partial \phi}{\partial x}$, $\tau_{zx} = \frac{\partial \phi}{\partial y}$ とし、 $\sigma_x = 0$ とみなし、 $\sigma_c = \{3(\tau_{zx}^2 + \tau_{zy}^2)\}^{1/2}$ とおけば、 $\dot{\lambda}$ は次の式で与えられる。

$$\dot{\lambda} = \frac{9G}{2\sigma_c^2} (\tau_{zx} \dot{\gamma}_{zx} + \tau_{zy} \dot{\gamma}_{zy}) / \{ H' + \frac{9G}{\sigma_c^2} (\tau_{zx}^2 + \tau_{zy}^2) \} \quad \text{----- (9)}$$

3-II. 解析例と実験値との比較

以上の理論により計算した結果と、SMT 型式 5000 kg-Cm の精密ねじ

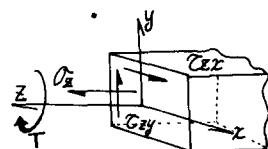


図-1

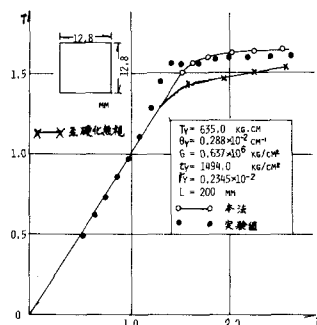


図-2

り機械を使用して、12.8mm x 12.8mm x 200mmの軟鋼のねじり実験結果を図-2に示す。

4-I. 薄肉箱形断面を有する棒

反り増分を $\hat{w}$ とすると、単純Warping理論に準じ、ねじれ率 $\hat{\theta}$ を補正関数 f を用いて次の式のように導入する。
 $\hat{w} = f(W\hat{u} + W\hat{v})$ $W\hat{u}$; 単純Warping理論反り関数, $W\hat{v}$; 塑性時反り関数 ----- (10)

この反り $\hat{w}$ によって生じる、曲げねじり応力 $\hat{\sigma}$ は、式(2)のReuss式で与えられるのである。この時、断面の自己平衡条件より、次の式で与えられる。

$$\hat{\sigma}_w = E \frac{d\hat{f}}{dz} W\hat{u} + \hat{\sigma}_w^p, \quad \hat{\sigma}_w^p = \frac{2E}{3A_0} \int_A \hat{\sigma}_w \hat{\epsilon} dA - \frac{2}{3} E \hat{\sigma}_w \hat{\epsilon} \quad \text{----- (11)}$$

せん断流の概念を導入し、せん断流 $\hat{q}$ は、 $\hat{q}^*$ を断面の閉合条件より決定される不静定せん断流とすれば、

$$\hat{q}_i^* = \frac{1}{A_0} \left[\int_0^L \frac{d\hat{\sigma}_w^p}{dz} \frac{du}{dz} \frac{du}{dz} + 2G\hat{\theta}A_i - 2f\hat{q}G\hat{\epsilon} \frac{du}{dz} + \sum b_{ij}\hat{q}_j^* + 2\sum \hat{q}_j^* f_j G\hat{\epsilon} \frac{du}{dz} \right] \quad \text{----- (12)}$$

$$\hat{q} = \hat{q}_i^* - \int_0^L \frac{d\hat{\sigma}_w^p}{dz} \frac{du}{dz} \quad \left(A_i = \int_0^L \frac{du}{dz}, \quad b_{ij} = \int_0^L \frac{du}{dz} \right)$$

よって、応力の釣合式と、断面閉合の条件によるねじりモーメント $\hat{T}$ は、 $\hat{T} = GJ\hat{\theta} - EC_w \frac{d^2 \hat{f}}{dz^2} + \hat{T}^p$ (13)

に比し、 $GJ\hat{\theta}$ は St. Venant のねじりモーメント、 $EC_w \frac{d^2 \hat{f}}{dz^2}$ は補正曲げねじりモーメント、 $\hat{T}^p$ は塑性ねじりモーメントである。

次に、歪の適合条件式 $\hat{\epsilon} = \frac{\partial \hat{w}}{\partial u} + \frac{\partial \hat{v}}{\partial z}$ に、 $\hat{\epsilon} = \hat{\epsilon}_s \hat{\psi}$ と式(10)を代入のうえ整理し、ねじりモーメント式を求めれば次の式をえる。
 $\hat{T} = G(J - I_c) \hat{f} + G I_c \hat{\theta} + \hat{T}^p \quad \text{----- (14)}$

ここで、 $I_c = \int \epsilon_s^2 du$ 、 ϵ_s は I_s ; 断面の接線に下したせん断中心からの垂直距離、 ψ ; ねじれ角である。

よって、 $\hat{\theta} = (I_c - J)/I_c$ として、補正誘導関数 f の算出方程式⁽¹⁾、および、ねじれ率 $\hat{\theta}$ は次の式で与えられる。

$$EC_w \frac{d^2 \hat{f}}{dz^2} - GJ\hat{\theta}^2 f = -\hat{\theta} \hat{T} + \hat{\theta} \hat{T}^p \quad \text{----- (15)}$$

$$\hat{\theta} = (\hat{T} - \hat{T}^p)/G I_c - \hat{\theta}^2 f \quad \text{----- (16)}$$

さらに、この場合の、 $\hat{\epsilon}$ は式(3)に $\hat{\sigma}_w = \hat{\sigma}_w$ を代入して、以下のよう

に求められる。ここに $\hat{\sigma}_w = [\hat{\sigma}_w^2 + 3(\frac{G}{E})^2 \hat{\theta}^2]^{\frac{1}{2}}$ である。

$$\hat{\epsilon} = \frac{3E(\hat{\sigma}_w \hat{\epsilon}_w + 3G/E \hat{\theta}^2 \hat{\psi})}{2\hat{\sigma}_w^2 \{H' + \frac{1}{\hat{\sigma}_w} [E\hat{\sigma}_w^2 + 9G(\frac{G}{E})^2 \hat{\theta}^2]\}} \quad \text{----- (17)}$$

4-II 解析例

以上の理論にもとづき、1 Box 片持梁の弾塑性ねじり応力解析を、 H' を変えて計算し、結果の一部を図-3に示す。

に比し、 $(\hat{T} = T/T_y, \hat{\theta} = \theta/\theta_y)$ 。

5. あとがき

太肉断面の場合、本理論解とひずみ硬化を無視した場合の膜理論による解と比べれば、本理論による方がより実験値に近いことが了解されよう。一方、薄肉1 BOXの棒に対しては、実験はなされていないが、解析解は図-3の $\hat{T}-\hat{\theta}$ 曲線に見られるように、補正関数 f を用いることにより、解の早期発散が抑えられ、かつひずみ硬化係数 H' の増大に伴ない、ねじり耐力も若干高めうるなど、一応妥当な傾向がえられるものと思われる。

参考文献

- 1) Komatsu, Sokimoto; *Elasto-Plastic Behavior of Thin-Walled Steel/Tube Under Combined-Forces*. Proc. of JSCE, No.235, 1975.
- 2) 太田, 藤 国; 薄肉多室閉断面梁の弾塑性曲げ応力(その1) (昭和50年 第30回年次学術講演会講演集)
- 3) 太田, 藤 国; せん断流理論による薄肉閉断面桁の弾塑性応力解析 (昭和51年度土木学会西部支部研究発表論文集)
- 4) 太田, 藤 国; 薄肉箱形断面を有する片持梁の弾塑性応力解析 (九州大学工学集報 第49巻第3号)
- 5) Benscoter; "A Theory of Torsion Bending for Multicells Beams" *Journal of Applied Mechanics*, vol.21, No.1, P.25, 1954.
- 6) O.C. Zienkiewicz; *Elasto-Plastic Solutions of Engineering Problems* (Initial Stress, Finite Element Approach. *International Journal for Numerical Method in Engineering* Vol.1 75~100

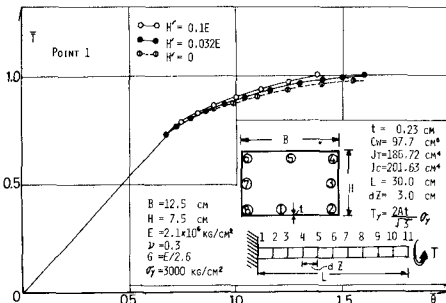


図-3