

(株) 神戸製鋼所 正員 〇 滝本哲四郎

(株) 神戸製鋼所 正員 藤野 真之

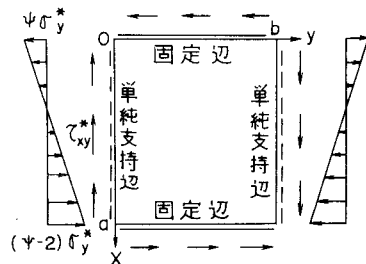
(株) 神戸製鋼所 正員 森脇 良一

1. まえがき. 矩形板の座屈後の挙動の解析は, プレートガーダーなどの薄板構造物の耐荷力を論議するうえで, 重要な解析のひとつと考えられる。従来, この種の解析は, 有限要素法に代表される数値的解法と, ガラーキン法に代表される解析的解法があるが, 矩形板のように比較的単純な構造を対象にし, 幾何学的非線形性のみを考慮する場合には, 解析的解法を用いた方が, 演算時間などの点で有利な場合があると考えられる。しかしながら, これまでのガラーキン法による同種の解析例をみると, 力学的境界条件では単純圧縮の場合が, また幾何学的境界条件では周辺単純支持の場合が専ら取り扱われており, その他の場合, たとえば, 固定辺を有する矩形板が曲げやせん断をうける場合などについては, 例がないように思われる。この原因のひとつには, 固定辺を有する矩形板の座屈後のたわみを表わす適切な近似関数が, 解析可能な形でみいだされなかったことが考えられる。そこで, 第1報<sup>1)</sup>では, 新しいたわみの近似関数を使い, 曲げをうける場合の解析について報告した。本研究はこれにひきつづき, せん断およびせん断と曲げを同時にうける載荷辺単純支持非載荷辺固定の矩形板の座屈後の挙動について解析を行なったものである。

2. 基礎方程式. 第1図に示すような, せん断と曲げをうける直交異方性板のたわみ基礎方程式として, 次の(1)式および(2)式を考える。

$$J_x \frac{\partial^4 F}{\partial x^4} + 2J_z \frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2} + J_y \frac{\partial^4 F}{\partial y^4} = \left( \frac{\partial^2 w_1}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w_1}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 w_1}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w_1}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} \quad (1)$$

$$D_x \frac{\partial^4 w_1}{\partial x^4} + 2D_z \frac{\partial^4 w_1}{\partial x^2 \partial y^2} + D_y \frac{\partial^4 w_1}{\partial y^4} = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \frac{\partial^2 (w_0 + w_1)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \frac{\partial^2 (w_0 + w_1)}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 (w_0 + w_1)}{\partial x \partial y} \quad (2)$$



第1図 座標と境界条件

ここに,  $J_x = 1/E_y t$ ,  $J_y = 1/E_x t$ ,  $2J_z = \frac{1}{Gt} - \nu_x J_y - \nu_y J_x$ ,  $D_x = E_x t^3/12(1 - \nu_x \nu_y)$ ,  $D_y = E_y t^3/12(1 - \nu_x \nu_y)$ ,  $2D_z = \frac{Gt^3}{3} + \nu_y D_x + \nu_x D_y$ ,  $w_0$  は初期たわみ,  $w_1$  は付加たわみ,  $t$  は板厚,  $\nu$  はポアソン比,  $E$  および  $G$  は弾性定数,  $F$  は次式を満足する応力関数である。

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} / t, \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} / t, \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} / t \quad (3)$$

3. たわみの近似関数. 載荷辺単純支持非載荷辺固定の幾何学的境界条件を,

$x=0, a$  で  $w_0 = w_1 = \partial w_0 / \partial x = \partial w_1 / \partial x = 0$ ;  $y=0, b$  で  $w_0 = w_1 = \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} + \nu_x \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 w_1}{\partial y^2} + \nu_x \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} = 0$  とし, これに適合するたわみの近似関数を, 本解析では, 次式で与えられるものとした。

$$w_0 = t \sum_{m,n} a_{mn} f_m(x)_a \sin \frac{n\pi}{b} y, \quad w_1 = t \sum_{m,n} b_{mn} f_m(x)_a \sin \frac{n\pi}{b} y \quad (4)$$

$$\text{ここに, } f_m(x)_a = \cos \frac{m-1}{a} \pi x - \cos \frac{m+1}{a} \pi x \quad (5)$$

4. 応力関数. 力学的境界条件を, 第1図にみるような, せん断と曲げの組合せ外力とした場合, 応力関数  $F$  は次式で与えられるとすればよい。

$$F = -\sigma_{xy}^* t x y - \sigma_y^* t \left( \frac{x^2}{3} - \frac{ax^2}{2} \psi \right) / a + t^2 \sum_{p,q} \phi_{pq} f_p(x)_a f_q(y)_b \quad (6)$$

ここに,  $\phi_{pq}$  は(1)式に,  $w_0, w_1$  および(6)式を代入して決定される  $a_{mn}, b_{mn}$  の2次多項式である。

5. 代数方程式. ガラーキン法によって, 未知数  $b_{mn}$  は,  $w_0, w_1$  および(6)式を次の(7)式に代入してえられる,  $m, n$  元連立3次方程式を解くことによって決定される。

$$\int_0^b \left\{ D_x \frac{\partial^4 w_1}{\partial x^4} + 2D_{xy} \frac{\partial^4 w_1}{\partial x^2 \partial y^2} + D_y \frac{\partial^4 w_1}{\partial y^4} - \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \frac{\partial^2 (w_0 + w_1)}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \frac{\partial^2 (w_0 + w_1)}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 (w_0 + w_1)}{\partial x \partial y} \right\} f_r(x) a \sin \frac{\pi}{b} y \, dx dy = 0 \quad (7)$$

6. 面外たわみと応力. (7)式の代数方程式が解かれ,  $b_{mn}$ が決定されれば, これを(4)式に代入して  $w_1$ が求められ, これに  $w_0$ を加えることによって面外たわみの総量が計算される. 次に膜応力 ( $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ ) は, (6)式を(3)式の右辺に代入し, これに  $b_{mn}$ を代入することによって計算される. また, 面外たわみによる応力 ( $\sigma_{Bx}, \sigma_{By}, \tau_{Bxy}$ ) は次の各式の右辺に  $w_0$ および  $w_1$ を代入することによって計算される.

$$\begin{aligned} \sigma_{Bx} &= 12 M_x Z / t^3, \\ \sigma_{By} &= 12 M_y Z / t^3, \\ \tau_{Bxy} &= 12 H_{xy} Z / t^3 \quad \text{--- (8)} \end{aligned}$$

ここに,

$$M_x = -D_x \left( \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} + \nu_y \frac{\partial^2 w_1}{\partial y^2} \right)$$

$$M_y = -D_y \left( \frac{\partial^2 w_1}{\partial y^2} + \nu_x \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} \right)$$

$$H_{xy} = -2D_{xy} \frac{\partial^2 w_1}{\partial x \partial y}$$

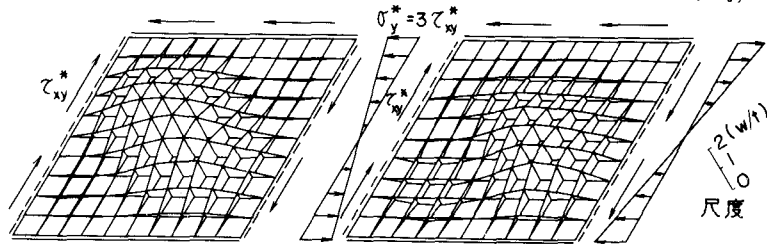
$Z$ は板の中立面を零とした板厚方向の座標を示す.

7. 解析結果. 本解析では, プログラム化の段階で  $w_0, w_1$ を第3項( $m=1,2,3; n=1,2,3$ )までとし, (7)式で与えられる9元連立3次方程式を Gauss-Seidel 法によって近似的に解いている.

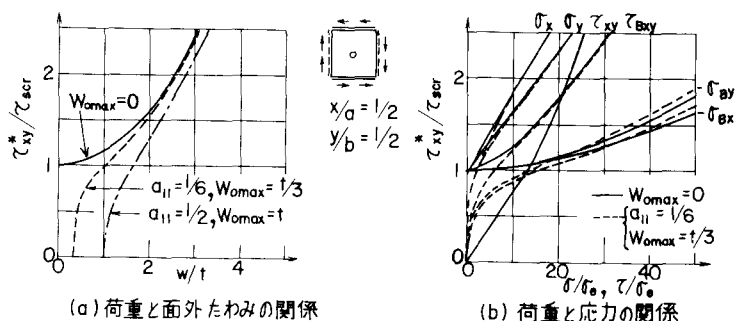
解析結果の1例として, 等方性の正方形板がせん断をうける場合, およびせん断と曲げを同時にうける場合の面外たわみの波形, 荷重とたわみの関係および荷重と各種応力の関係を第2図~第4図に示す. なお, その他の結果については, 講演会当日に報告する予定である.

(参考文献)

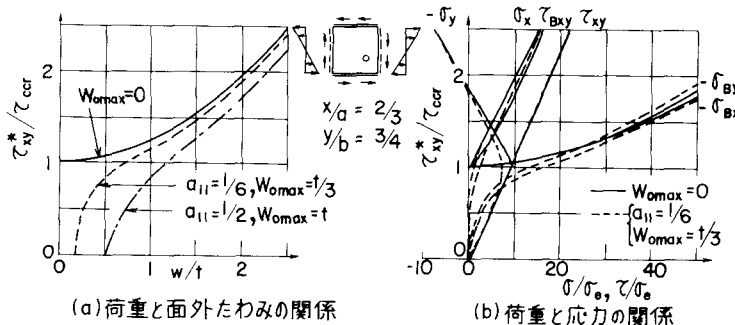
- 1) S. Levy; "Bending of Rectangular Plates with Large Deflections", NACA Report No. 737, 1942
- 2) N. Yamaki; "Postbuckling Behavior of Rectangular Plates with Small Initial Curvature Loaded in Edge Compression", ASME, 1969
- 3) 小西一郎, 白石成人, 渡辺英一; "腹板の耐力に関する一考察", 土木学会論文報告集, 第136号, 1966
- 4) A. Mansour; "Post Buckling Behavior of Stiffened Plates with Small Initial Curvature under Combined Loading", M.I.T. Report No. 70-18, 1971
- 5) 森脇良一, 藤野真一, 滝本哲四郎; "板の座屈後の挙動に関する研究(第1報)", 土木学会関西支部秋季学術講演会概要集, 1976



第2図 面外たわみ ( $W_0=0$ )



第3図 せん断をうける場合の荷重と面外たわみおよび応力の関係



第4図 せん断と曲げをうける場合の荷重と面外たわみおよび応力の関係