

I-137 丸味のある矩形板の座屈の研究(その一)

北海道大学 正員 林川 俊郎
北海道大学 正員 渡辺 昇

1. まえがき

現在までに薄い平板の弾性座屈の研究は数多く報告されているが、図-1のように隅角部に丸味のある矩形板の座屈の研究は、着者の知る限りにおいて少ないようである。解析方法は Schwarz-Christoffel 変換により与えられた矩形板の領域を単位円に等角写像し、Rayleigh-Ritz 法を用いて座屈荷重を求める。計算例として、一様周圧を受ける矩形板が隅角部の丸味(隅半径比 $\alpha = r/2a$)によって、どのように座屈荷重が変化するかを考える。

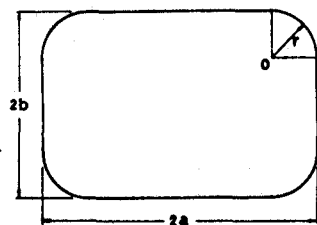


図-1 丸味のある矩形板

2. 解析方法

薄い弾性平板が横荷重 q , 面内荷重 σ_x , σ_y , τ_{xy} を受けるときの基礎微分方程式は次式で与えられる。

$$D \nabla^4 w = q + t(\sigma_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2\tau_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \sigma_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}) \quad (1)$$

ここに、 w : 板のたわみ、 D : 板の曲げ剛性、 t : 板厚

いま、一様周圧 p が作用すると、式(1)は次のようになる。

$$D \nabla^4 w + p t \nabla^2 w = 0 \quad (2)$$

これを複素表示すると次式を得る。

$$16 \frac{\partial^4 w}{\partial z^2 \partial \bar{z}^2} + 4 p t / D \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial z \partial \bar{z}} = 0 \quad (3)$$

ただし、 $z = x + iy$, $\bar{z} = x - iy$ 。

図-2のように、 z -平面における矩形板を ζ -平面の単位円に等角写像する関数は次式で表わされる。

$$z = \omega(\zeta) = 2a \sum_{n=1}^N a_n \zeta^{m(n-1)+1} \quad (\zeta = r e^{i\theta}, N: \text{有限項}) \quad (4)$$

ここに、 $2a$: 矩形板の辺長、 a_n : 実数係数、 m : 矩形板の場合 $m=2$, 正方形板の場合 $m=4$

したがって、式(4)を式(3)に代入すると次のようになる。

$$\frac{\partial^4 w}{\partial \zeta^2 \partial \bar{\zeta}^2} \frac{dz}{d\zeta} \frac{d\bar{z}}{d\bar{\zeta}} - \frac{\partial^3 w}{\partial \zeta^2 \partial \bar{\zeta}} \frac{dz}{d\zeta} \frac{d^2 \bar{z}}{d\bar{\zeta}^2} - \frac{\partial^3 w}{\partial \zeta \partial \bar{\zeta}^2} \frac{d^2 z}{d\zeta^2} \frac{d\bar{z}}{d\bar{\zeta}} + \frac{\partial^2 w}{\partial \zeta \partial \bar{\zeta}} \frac{d^2 z}{d\zeta^2} \frac{d^2 \bar{z}}{d\bar{\zeta}^2} + \frac{p t}{4 D} \frac{\partial^2 w}{\partial \zeta \partial \bar{\zeta}} \left(\frac{dz}{d\zeta} \right)^2 \left(\frac{d\bar{z}}{d\bar{\zeta}} \right)^2 = 0 \quad (5)$$

この基礎微分方程式を満足するたわみ関数 $w(\zeta, \bar{\zeta})$ を周辺上の境界条件によって次のように仮定する。

$$(i) \text{ 周辺固定の場合 } w = \sum_{k=1}^K b_k [1 - (\zeta \bar{\zeta})^k]^2 \quad (K: \text{有限項}) \quad (6.a)$$

$$(ii) \text{ 周辺単純支持の場合 } w = \sum_{k=1}^K b_k [1 - (\zeta \bar{\zeta})^k] \quad (b_k: \text{未定係数}) \quad (6.b)$$

次に平板の曲げによるびずみエネルギー U と座屈のときに応力がなす仕事 T は次のように与えられる。

$$U = \frac{D}{2} \iint_S [(\nabla^2 w)^2 - 2(1-\nu) \{ \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \bar{z}^2} - (\frac{\partial^2 w}{\partial z \partial \bar{z}})^2 \}] dS \quad (7.a)$$

$$T = \frac{p t}{2} \iint_S [(\frac{\partial w}{\partial z})^2 + (\frac{\partial w}{\partial \bar{z}})^2] dS \quad (7.b)$$

ここに、 ν : ポアソン比、 S : 積分すべき平板の領域。この両式を複素表示すると次のようになる。

$$U = 4D \iint_S [2(\frac{\partial^2 w}{\partial z \partial \bar{z}})^2 + (1-\nu) \{ \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \bar{z}^2} - (\frac{\partial^2 w}{\partial z \partial \bar{z}})^2 \}] dS \quad (8.a)$$

$$T = 2p t \iint_S \frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial w}{\partial \bar{z}} dS \quad (8.b)$$

さらに式(4)を式(8.a), 式(8.b)に代入すると(5, 5)座標におけるエネルギー式を得る。

$$U = 4D \iint_S \left[2 \left[\frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2 \partial \eta^2} \frac{1}{\omega(\xi) \omega(\eta)} \right]^2 + (1-\nu) \left[\frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2 \partial \eta^2} \left\{ \frac{1}{\omega(\xi) \omega(\eta)} \right\}^2 - \frac{2 \operatorname{Re} \left\{ \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} \omega'(\xi) \overline{\omega'(\eta)} \right\}}{\left\{ \omega'(\xi) \overline{\omega'(\eta)} \right\}^2} \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{\partial w}{\partial \xi} \frac{\partial w}{\partial \eta} \frac{\omega'(\xi) \overline{\omega'(\eta)}}{\left\{ \omega'(\xi) \overline{\omega'(\eta)} \right\}^2} - \left\{ \frac{\partial^2 w}{\partial \xi \partial \eta} \frac{1}{\omega(\xi) \omega(\eta)} \right\}^2 \right] \right] dS \quad (9.a)$$

$$T = 2Pl \iint_S \frac{\partial w}{\partial \xi} \frac{\partial w}{\partial \eta} \frac{1}{\omega(\xi) \omega(\eta)} dS \quad (9.b)$$

特に、周辺固定の場合には式(9.a)は次のように簡単になる。

$$U = 8D \iint_S \left\{ \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2 \partial \eta^2} \frac{1}{\omega(\xi) \omega(\eta)} \right\}^2 dS \quad (9.c)$$

与えられた平板の生ポテンシャルエネルギーを Π とすれば、停留条件 $\delta \Pi = 0$ が成立する。したがって、たわみ関数、式(6.a) および式(6.b)におけるすべての b_k に対して次式が成り立つ。

$$\partial \Pi / \partial b_k = \partial U / \partial b_k - \partial T / \partial b_k = 0 \quad (k = 1, 2, 3, \dots, K) \quad (10)$$

この式(10)より、 $(K \times K)$ の固有行列式が得られ、固有値として座屈荷重が求められる。

3. 計算結果

計算例として、周辺固定で丸味のある矩形板(辺比: $b/a = 1.0$)の座屈荷重について考える。したがって、式(6.a)を式(10)の第1項、第2項に代入すると次のようになる。

$$\frac{\partial U}{\partial b_k} = \frac{4\pi D}{a^2} \sum_{l=1}^K \sum_{j=0}^J b_l k^2 l^2 d_{jm}^2 \left(\frac{4}{2k+2l+jm-1} - \frac{2}{2k+l+jm-1} - \frac{2}{k+2l+jm-1} + \frac{1}{k+l+jm-1} \right) \quad (11.a)$$

$$\frac{\partial T}{\partial b_k} = \frac{4\pi Pl}{a^2} \sum_{l=1}^K \sum_{j=0}^J b_l k l C_{jm}^2 \left(\frac{1}{2k+2l+jm} - \frac{1}{2k+l+jm} - \frac{1}{k+2l+jm} + \frac{1}{k+l+jm} \right) \quad (11.b)$$

ここに、 $Com = 1/a_1$, $Dom = a_1^2$, $dom = 1/Dom$,

$$C_{km} = -1/a_1 \sum_{l=1}^k (lm+1) a_l + 1 C_{(k-l)m}$$

$$D_{kn} = \sum_{l=1}^{k+1} \{m(l-1)+1\} a_l \cdot \{m(k-l+1)+1\} a_{k-l+2}$$

$$d_{km} = -1/Dom \sum_{l=1}^k Dom d_{(k-l)m}$$

ただし、 a_n は式(4)における写像関数の係数である。

結局、式(11.a)および式(11.b)を式(10)に代入して、

表-1 解の収束状態

マトリックス表示すると次のような

$$[U] - k[T] = 0 \quad (12)$$

固有値問題になる。ここで、

$$k = \pi \cdot t a^2 / D \quad (13)$$

k は座屈係数と呼ばれるものである。

表-1は解の収束状態を示したものであり $K=4, 5$ でほぼ収束している。図-3は周辺固定の場合と、周辺単純支持の場合における座屈係数 k が隅角部の隅半径比 $\alpha = r/2b$ による影響を示したものである。座屈荷重は周辺固定の場合は $\alpha \approx 0.38$ 、周辺単純支持の場合は $\alpha \approx 0.28$ で最小値を示す。したがって、角のある矩形板($\alpha=0.0$)と円板($\alpha=0.5$)との中間に位置する丸味のある矩形板の座屈荷重は最小値を示すことがわかった。

$r/2a$	0.200	0.400	0.500
$K=1$	17.597	15.506	16.000
$K=2$	14.306	13.934	14.787
$K=3$	14.121	13.840	14.695
$K=4$	14.108	13.829	14.684
$K=5$	14.106	13.827	14.682
$K=6$	14.105	13.827	14.682

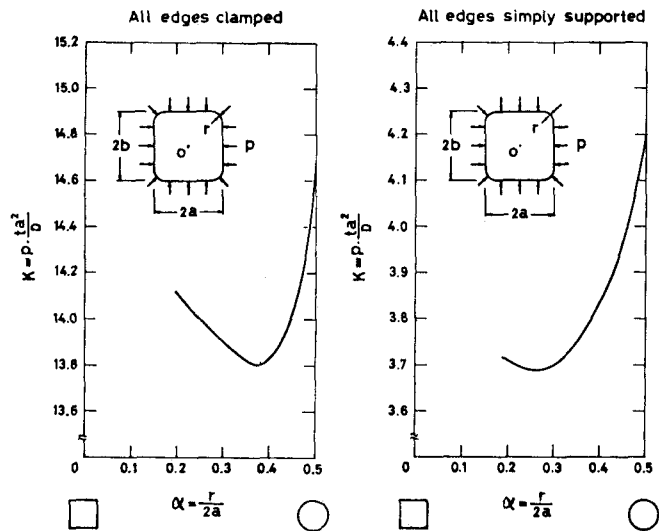


図-3 隅角部の丸味が座屈荷重に及ぼす影響