I-123 桁の横倒れ座屈の剛性マトリックスによる解法

北海道大学 学生員 佐藤 光一
北海道大学 正 員 渡辺 昇
北海道大学 正 員 林川 俊郎

1. まえがき

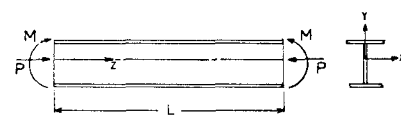
桁の横倒れ座屈の剛性マトリックスを誘導し、この剛性マトリックスを用いて 桁の横倒れ座屈荷重を求めようとするものである。

2. 桁の横倒れ座屈の剛性マトリックスの誘導

図−1の様な一軸対称の一様断面の桁が端モーメント$M_x(0)=M_x(\ell)=M$ 及び軸圧縮力Pを受けて横倒れ変形の座屈を起こす場合の基本微分方程式は、

$$E\cdot I_y\cdot U_s^{IV}+P\cdot U_s''-(M-P\cdot y_0)\varphi''=0 \quad \text{------}(1)$$

$$EC_\omega\varphi^{IV}-(GJ-\beta_1 M-P\,I_0\,A)\varphi''-(M-P\cdot y_0)\cdot U_s''=0 \quad \text{------}(2)$$



図−1

ここに

- 座標の原点は図心である。
- y_0は剪断中心のy座標である。
- 変位U_s、回転角φは剪断中心のものである。
- $\beta_1=\frac{1}{I_x}\left(\int_A y^3\,dA+\int_A x^2 y\,dA\right)-2\cdot y_0$
- $I_0=I_x+I_y+A\cdot y_0^2$ (剪断中心の回りの極慣性モーメント)
- I_x, I_y は図心を通る主軸に関する主慣性モーメント

(1)(2)の連立微分方程式の一般解は、

$$U_s(z)=A_1\cos mz+A_2\sin mz+A_3\cosh nz+A_4\sinh nz+A_5\cdot z+A_6 \quad \text{----}(3)$$

$$\varphi(z)=A_1 a_1\cos mz+A_2 a_1\sin mz+A_3 a_2\cosh nz+A_4 a_2\sinh nz+\frac{C_1}{C_2}A_5 z+\frac{C_1}{C_2}A_6+A_7 z+A_8 \quad \text{---}(4)$$

ここに

$$C_1=\frac{P}{E I_y},\quad C_2=\frac{M-P\cdot y_0}{E I_y},\quad D_1=\frac{GJ-\beta_1 M-P I_0/A}{E C_\omega},\quad D_2=\frac{M-P\cdot y_0}{E\cdot C_\omega}$$

$$\alpha=\frac{D_1-C_1}{2},\quad \beta=C_1D_1+C_2D_2$$

$$n=\sqrt{\alpha+\sqrt{\alpha^2+\beta}},\quad m=\sqrt{-\alpha+\sqrt{\alpha^2+\beta}},\quad a_1=\frac{C_1-m^2}{C_2},\quad a_2=\frac{C_1+m^2}{C_2}$$

断面力は、

$$Q_x(z)=-E I_y U_s'''-P\cdot U_s'+(M-P\cdot y_0)\varphi'=E I_y C_2 A_7 \quad \text{-----}(5)$$

$$M_y(z)=-E I_y U_s''=E I_y(m^2 A_1\cos mz+m^2 A_2\sin mz+n^2 A_3\cosh nz+n^2 A_4\sinh nz) \quad \text{-----}(6)$$

$$M_D(z)=-E C_\omega\varphi'''+(GJ-\beta_1 M-P\cdot I_0/A)\varphi'+(M-P\cdot y_0)U_s'-E C_\omega\left\{\frac{\beta}{C_2}A_5+D_1 A_7\right\} \quad \text{------}(7)$$

$$M_\omega(z)=-E C_\omega\varphi''=E C_\omega(m^2 A_1 a_1\cos mz+m^2 A_2 a_1\sin mz-n^2 A_3 a_2\cosh nz-n^2 A_4 a_2\sinh nz) \quad \text{-----}(8)$$

次に 境界条件 $z=0$, $z=\ell$ での断面力を積分定数A_1～A_8を用いて表わすと $\{P\}=[G]\{A\}$

又、積分定数を $z=0$, $z=\ell$ での変形量で表わすと $\{A\}=[F]\{u\}$

従って $\{P\}=[G]\{A\}=[G][F]\{u\}=[K]\{u\}$

$[G][F]=[K]$ が 剛性マトリックスである。

断面力の符号の変更に注意して 剛性マトリックス を表わすと次の様になる。

$$
\begin{Bmatrix} Q_x(0) \\ M_y(0) \\ M_b(0) \\ M_\omega(0) \\ Q_x(\ell) \\ M_y(\ell) \\ M_b(\ell) \\ M_\omega(\ell) \end{Bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
K_{11} & K_{12} & K_{13} & K_{14} & K_{15} & K_{16} & K_{17} & K_{18} \\
 & K_{22} & K_{23} & K_{24} & K_{25} & K_{26} & K_{27} & K_{28} \\
 & & K_{33} & K_{34} & K_{35} & K_{36} & K_{37} & K_{38} \\
 & & & K_{44} & K_{45} & K_{46} & K_{47} & K_{48} \\
 & & & & K_{55} & K_{56} & K_{57} & K_{58} \\
 & \text{Symmetric} & & & & K_{66} & K_{67} & K_{68} \\
 & & & & & & K_{77} & K_{78} \\
 & & & & & & & K_{88}
\end{bmatrix}
\begin{Bmatrix} U_s(0) \\ U_s'(0) \\ \varphi(0) \\ \varphi'(0) \\ U_s(\ell) \\ U_s'(\ell) \\ \varphi(\ell) \\ \varphi'(\ell) \end{Bmatrix}
\quad \cdots (9)
$$

$K_{15}=-K_{11}$　$K_{16}=K_{12}$　$K_{17}=-K_{13}$　$K_{18}=K_{14}$

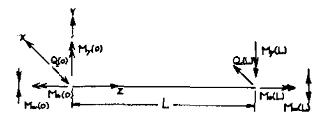
$K_{25}=-K_{12}$　$K_{27}=-K_{23}$　$K_{35}=-K_{35}$　$K_{36}=K_{23}$

$K_{37}=-K_{33}$　$K_{38}=K_{34}$　$K_{45}=-K_{14}$　$K_{46}=K_{28}$

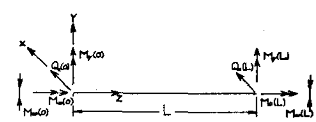
$K_{47}=-K_{34}$　$K_{55}=K_{11}$　$K_{56}=-K_{12}$　$K_{57}=K_{13}$

$K_{58}=-K_{14}$　$K_{66}=K_{22}$　$K_{67}=-K_{23}$　$K_{68}=K_{24}$

$K_{77}=K_{33}$　$K_{78}=-K_{34}$　$K_{88}=K_{44}$



微分方程式における
断面力の正方向



剛性マトリックスにおける
断面力の正方向

図－2

剛性マトリックスの各要素は．

$K_{11}=EI_y\{m^3\nu_2 a_1\Delta_1-m^3\lambda_2 a_2\Delta_2\}/(a_1-a_2)\cdot\Delta_1\cdot\Delta_2$

$K_{12}=EI_y\{n^2(\nu_1-1)a_1\Delta_1+m^2(\lambda_1-1)a_2\Delta_2\}/(a_1-a_2)\cdot\Delta_1\cdot\Delta_2$

$K_{13}=EI_y\{m^3\lambda_2\Delta_2-n^3\nu_2\Delta_1\}/(a_1-a_2)\cdot\Delta_1\cdot\Delta_2$

$K_{14}=EI_y\{n^2(1-\nu_1)\Delta_1+m^2(1-\lambda_1)\Delta_2\}/(a_1-a_2)\cdot\Delta_1\cdot\Delta_2$

$K_{22}=EI_y\{m(m\ell\lambda_1-\lambda_2)a_2\Delta_2+n(n\ell\nu_1-\nu_2)a_1\Delta_1\}/(a_1-a_2)\cdot\Delta_1\cdot\Delta_2$

$K_{23}=EI_y\{m^2(1-\lambda_1)\Delta_2+n^2(1-\nu_1)\Delta_1\}/(a_1-a_2)\cdot\Delta_1\cdot\Delta_2$

$K_{24}=EI_y\{m(\lambda_2-m\ell\lambda_1)\Delta_2+n(\nu_2-n\ell\nu_1)\Delta_1\}/(a_1-a_2)\cdot\Delta_1\cdot\Delta_2$

$K_{26}=EI_y\{n(\nu_2-n\ell)a_1\Delta_1+m(\lambda_2-m\ell)a_2\Delta_2\}/(a_1-a_2)\cdot\Delta_1\cdot\Delta_2$

$K_{28}=EI_y\{m(m\ell-\lambda_2)\Delta_2+n(n\ell-\nu_2)\Delta_1\}/(a_1-a_2)\cdot\Delta_1\cdot\Delta_2$

$K_{33}=EC_\omega\{m^3\lambda_2 a_1\Delta_2-n^3\nu_2 a_2\Delta_1\}/(a_1-a_2)\cdot\Delta_1\cdot\Delta_2$

$K_{34}=EC_\omega\{n^2(1-\nu_1)a_2\Delta_1+m^2(1-\lambda_1)a_1\Delta_2\}/(a_1-a_2)\cdot\Delta_1\cdot\Delta_2$

$K_{44}=EC_\omega\{m(\lambda_2-m\ell\lambda_1)a_1\Delta_2+n(\nu_2-n\ell\nu_1)a_2\Delta_1\}/(a_1-a_2)\cdot\Delta_1\cdot\Delta_2$

$K_{48}=EC_\omega\{m(m\ell-\lambda_2)a_1\Delta_2+n(n\ell-\nu_2)a_2\Delta_1\}/(a_1-a_2)\cdot\Delta_1\cdot\Delta_2$

ここに

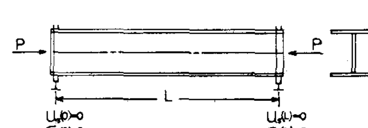
$$
\left\{
\begin{array}{llll}
\lambda_1=\cos m\ell, & \lambda_2=\sin m\ell, & \nu_1=\cosh n\ell, & \nu_2=\sinh n\ell \\
\Delta_1=2(1-\lambda_1)-m\ell\lambda_2, & \Delta_2=2(1-\nu_1)+n\ell\nu_2 & &
\end{array}
\right\}
$$

3. 計算例

2軸対称断面で軸圧縮力Pのみを受ける両端単純支持の桁について計算を行った。

固有座屈方程式は、剛性マトリックスにおいて．$M_y(0)=0$，$M_\omega(0)=0$，$M_y(\ell)=0$，$M_\omega(\ell)=0$　$U_s(0)=0$，$\varphi(0)=0$，$U_s(\ell)=0$，$\varphi(\ell)=0$　とおくと、

$$
\begin{vmatrix} K_{22}, & K_{26} \\ K_{26}, & K_{22} \end{vmatrix}
\times
\begin{vmatrix} K_{44}, & K_{48} \\ K_{48}, & K_{44} \end{vmatrix}
=0
$$



従って

純捩り座屈に対する最小座屈荷重は　$P_{cr}=\dfrac{1}{I_o/A}\left(GJ+\pi^2\dfrac{EC_\omega}{\ell^2}\right)$

曲げ座屈に対する最小座屈荷重は　$P_{cr}=EI_y\dfrac{\pi^2}{\ell^2}$　（y軸回りについて）

その他の計算例については．当日発表する予定である。