

久慈高等学校 正員 安彦敏郎

北海道大学 正員 渡辺 昇

岩手大学 正員 宮本 裕

本研究は、軸方向圧縮力を受ける弾性床上の棒について、カステリャノの定理を用いて剛性マトリックスを誘導し、種々の境界条件と変断面を有する弾性床上の棒の座屈解析を行なったものである。

1. 剛性マトリックスの誘導

図のように、基礎係数 k の弾性床にある棒が、軸方向圧縮力 N を受けている時の仕事の式は、内力による仕事=外力による仕事とあいて、次のようになる。

$$W_1 + W_2 = X_1 u_1 + X_2 u_2 + M_1 \theta_1 + M_2 \theta_2 + W_3 \quad \dots (1)$$

ここで W_1 は棒の曲げエネルギーを示し $W_1 = \frac{1}{2} \int_0^l E \sigma \epsilon dA dz$

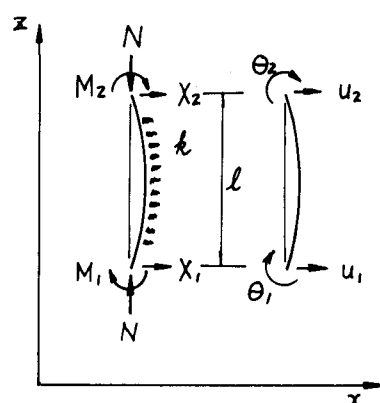
W_2 はバネのひずみエネルギーを示し $W_2 = \frac{1}{2} \int_0^l k u \cdot u dz$

W_3 は荷重による仕事を示し $W_3 = \frac{1}{2} \int_0^l N \left(\frac{du}{dz} \right)^2 dz$

なお、変位関数を $u = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 \dots (2)$

とする。そうすると、中立軸から x なる距離におけるひずみと応力は $\epsilon = -x \frac{d^2 u}{dz^2}$, $\sigma = E \epsilon$ となる。式(1)を変位 $u_1, \theta_1, u_2, \theta_2$ でそれぞれ微分すれば、力 X_1, M_1, X_2, M_2 が求められる。

これをマトリックス表示すると、次のようになる。



$$\begin{pmatrix} X_1 \\ M_1 \\ X_2 \\ M_2 \end{pmatrix} = EI \begin{pmatrix} \frac{12}{l^3} & -\frac{6}{l^2} & -\frac{12}{l^3} & -\frac{6}{l^2} \\ -\frac{6}{l^2} & \frac{4}{l} & \frac{6}{l^2} & \frac{2}{l} \\ -\frac{12}{l^3} & \frac{6}{l^2} & \frac{12}{l^3} & \frac{6}{l^2} \\ -\frac{6}{l^2} & \frac{2}{l} & \frac{6}{l^2} & \frac{4}{l} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ \theta_1 \\ u_2 \\ \theta_2 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} \frac{13l}{35} & -\frac{11l^2}{210} & \frac{9l}{70} & \frac{13l^2}{420} \\ -\frac{11l^2}{210} & \frac{l^3}{105} & -\frac{13l^2}{420} & -\frac{l^3}{140} \\ \frac{9l}{70} & -\frac{13l^2}{420} & \frac{13l}{35} & \frac{11l^2}{210} \\ \frac{13l^2}{420} & -\frac{l^3}{140} & \frac{11l^2}{210} & \frac{l^3}{105} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ \theta_1 \\ u_2 \\ \theta_2 \end{pmatrix} - N \begin{pmatrix} \frac{6}{5l} & -\frac{1}{10} & -\frac{6}{5l} & -\frac{1}{10} \\ -\frac{1}{10} & \frac{2l}{15} & \frac{1}{10} & -\frac{l}{30} \\ -\frac{6}{5l} & \frac{1}{10} & \frac{6}{5l} & \frac{1}{10} \\ -\frac{1}{10} & -\frac{l}{30} & \frac{1}{10} & \frac{2l}{15} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ \theta_1 \\ u_2 \\ \theta_2 \end{pmatrix} \quad \dots (3)$$

式(3)の第1項は棒の曲げの剛性マトリックス、第2項はばねの剛性マトリックス、第3項は座屈荷重による剛性マトリックスを表わす。特に $k=0$ として第2項を無視すると、棒の座屈の剛性マトリックスとなる。

2. 座屈荷重の計算

この剛性方程式から座屈荷重 N を求める問題は、変位を ϕ で表わして $[K]\{\phi\} = N[A]\{\phi\} \dots (4)$

から N を求める一般固有値問題となる。これをコレスキー法を用いて $[M]\{\psi\} = N\{\psi\} \dots (5)$

という標準固有値問題になおして N を求める。式(4)から式(5)を求めるには、コレスキー分解によって

$[A] = [L][L]^T$ とする。また $\{\phi\} = [L]^T\{\psi\}$ とおくと、式(4)は

$$[K][L]^T\{\psi\} = N[L][L]^T[L]^T\{\psi\} = N[L]\{\psi\}$$

両辺に左から $[L]^{-1}$ をかけて

$$[L]^{-1}[K][L]^T\{\psi\} = N[L]^{-1}[L]\{\psi\} = N\{\psi\}$$

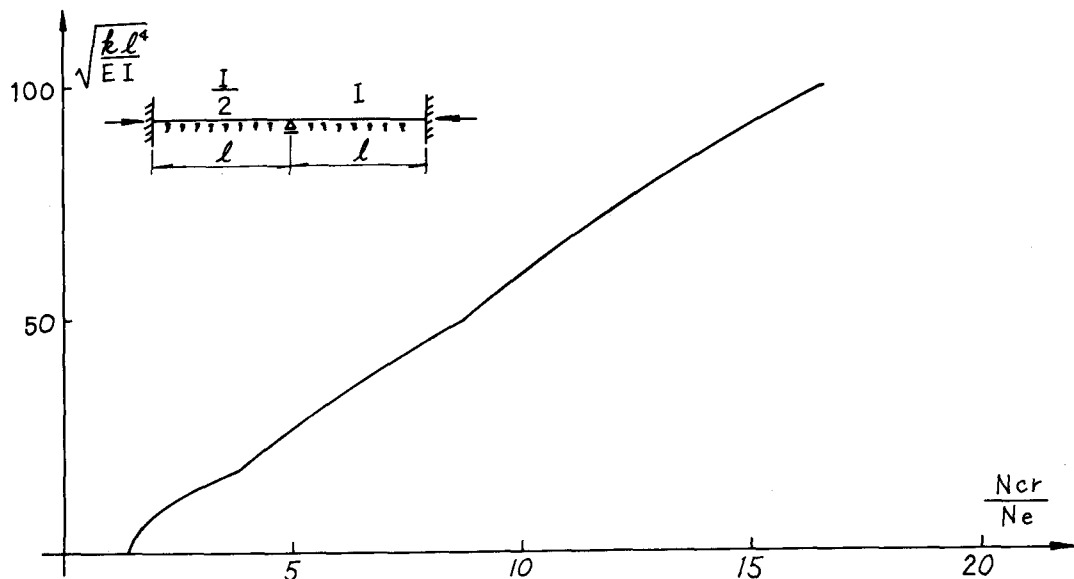
という標準固有値問題となる。

3. 計算例

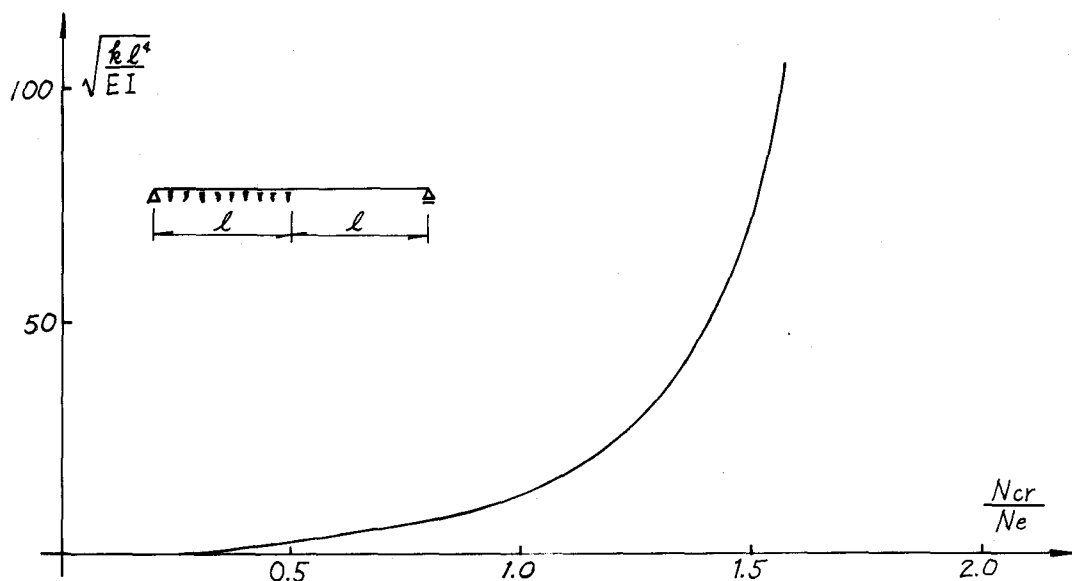
この剛性マトリックスより、電子計算機を用いて、種々の条件の弾性床上の棒の座屈荷重を求める。

なお、 N_{cr} は座屈荷重、 N_e はオイラーの座屈荷重 $\frac{\pi^2 EI}{l^2}$ を表わす。

(1) 断面2次モーメントが異なり、中央に支点のある両端固定の棒



(2) 支間の1/2が弾性支持された棒



計算には、北大、東北大の大型計算機センターと、岩手大学土木工学科 OKITAC 4300 C を使った。

また、この研究の一部を土木工学科4年の菊池光君に手伝っていただいたことを感謝する。

参考文献 1) 大地羊三：構造解析とコンピュータ、産業図書

2) 山田嘉昭, 佐藤俊雄：有限要素法における最近の固有値問題解法, 生産研究 26 巻6号

3) 渡辺, 宮本, 安彦：弾性床上の棒の座屈の剛性マトリックス解析法について, 第30回講演概要集