I-119　弾性床上の長柱の座屈

三和建設コンサルタンツ(株) 正員　○築山　武司
信州大学工学部　　正員　谷本勉之助

1. はじめに　圧縮軸力を考慮した弾性床上の梁の解析においては座屈が問題になる．単径間梁を例にとると，縦荷重を一定にしておいて，圧縮軸力（両端における横荷重）を漸増させてゆくと，たわみ等各状態量はしだいに大きくなり遂には無限大となり，無限大点を境にし状態量の符号は反転する．この無限大点における圧縮軸力が座屈荷重であることに注目し，弾性床上の長柱の座屈の解析を「演算子法」を用いて試みた．

2. 基礎式　弾性床上の圧縮軸力を受けた梁の微分方程式は，

$p=\sqrt{\frac{QL^2}{EI}}$，$\beta=\sqrt[4]{\frac{kL^4}{4EI}}$，$\rho=\frac{x}{L}$ とおくと，$\frac{d^4\omega}{d\rho^4}+p^2\frac{d^2\omega}{d\rho^2}+4\beta^4\omega=0$ ---(1)

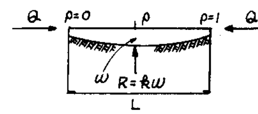


図-1

(1)式の解は圧縮軸力 Q の大きさにより3つの場合に分けられる．すなわち

$Q>2\sqrt{kEI}$ のとき，$\lambda,\mu=\sqrt{\frac{1}{2}[p^2\pm\sqrt{p^4-16\beta^4}]}$，$\alpha=\frac{\mu}{\lambda}$，$\gamma=\frac{p^2}{\lambda^2}$

$$\mathbf{W}(\rho)=\begin{bmatrix}\omega\\ \theta\\ M\\ S\end{bmatrix}_\rho=\begin{bmatrix}1\\ \frac{d}{dx}\\ -EI\frac{d^2}{dx^2}\\ -EI\frac{d^3}{dx^3}-Q\frac{d}{dx}\end{bmatrix}\omega=\begin{bmatrix}1\\ \frac{\lambda}{L}\\ \frac{\lambda^2EI}{L^2}\\ \frac{\lambda^3EI}{L^3}\end{bmatrix}^D\begin{bmatrix}\cos\lambda\rho & \sin\lambda\rho & \cos\mu\rho & \sin\mu\rho\\ -\sin\lambda\rho & \cos\lambda\rho & -\alpha\sin\mu\rho & \alpha\cos\mu\rho\\ \cos\lambda\rho & \sin\lambda\rho & \alpha^2\cos\mu\rho & \alpha^2\sin\mu\rho\\ (\gamma-1)\sin\lambda\rho & -(\gamma-1)\cos\lambda\rho & (\gamma\alpha-\alpha^3)\sin\mu\rho & -(\gamma\alpha-\alpha^3)\cos\mu\rho\end{bmatrix}\mathbb{N} \quad ---(2)$$

$\mathbb{N}$：積分定数群の固有マトリクス

$Q=2\sqrt{kEI}$ のとき，$\lambda=\mu=\frac{p}{\sqrt{2}}$，$\gamma=\frac{p^2}{\lambda^2}$　　$\omega(\rho)=[\cos\lambda\rho\quad \sin\lambda\rho\quad \lambda\rho\cos\lambda\rho\quad \lambda\rho\sin\lambda\rho]\,\mathbb{N}$ ---(3)

$Q<2\sqrt{kEI}$ のとき，$\lambda,\mu=\frac{1}{2}\sqrt{4\beta^2\mp p^2}$，$\alpha=\frac{\mu}{\lambda}$，$\alpha'=\frac{2\alpha}{1-\alpha^2}$，$\alpha''=-\alpha$，$\gamma=\frac{p^2}{\lambda^2}$

$$\omega(\rho)=[e^{\lambda\rho}\cos\mu\rho\quad e^{\lambda\rho}\sin\mu\rho\quad e^{-\lambda\rho}\cos\mu\rho\quad e^{-\lambda\rho}\sin\mu\rho]\,\mathbb{N} \quad ---(4)$$

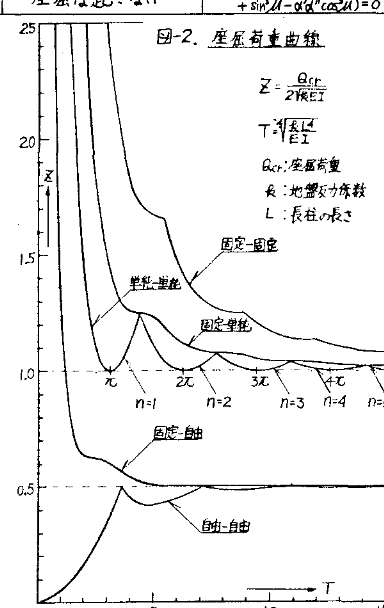
3. 座屈方程式　基礎式に境界条件を取り込むと座屈方程式は $\det\begin{bmatrix}\mathbb{B}\\ \mathbb{B}'\end{bmatrix}$．ここに $\mathbb{B}$，$\mathbb{B}'$ は境界マトリクスである．

case ＼ 支持条件	単純支持―単純支持	固定―固定	自由―自由	固定―単純支持	固定―自由
$Q>2\sqrt{kEI}$	$\sin\lambda\sin\mu=0$, $Q_{cr}=\frac{n^2\pi^2EI}{L^2}+\frac{L^2k}{n^2\pi^2}$	$2\alpha(1-\cos\mu\cos\lambda)-(\alpha^2+1)\sin\lambda\sin\mu=0$	$2(\gamma-1)(\gamma\alpha-\alpha^3)(1-\cos\lambda\cos\mu)-\{(\gamma^2+\alpha^2)(\alpha^2+1)-4\gamma\alpha^2\}\sin\lambda\sin\mu=0$	$\alpha\cos\mu\sin\lambda-\cos\lambda\sin\mu=0$	$(\gamma-\alpha^2)(\cos\lambda\cos\mu+\alpha\sin\lambda\sin\mu-\alpha^2)+(\gamma-1)(\alpha^2\cos\lambda\cos\mu+\alpha\sin\lambda\sin\mu-1)=0$
$Q=2\sqrt{kEI}$	$\sin\lambda=0$, $\sqrt[4]{\frac{kL^4}{EI}}=n\pi$	座屈は起きない	$\sin\lambda=\pm\frac{\lambda}{3}$	座屈は起きない	$1-\lambda^2+3\cos^2\lambda=0$
$Q<2\sqrt{kEI}$	座屈は起きない	座屈は起きない	$(\alpha'-\alpha'')\sinh\lambda\pm(\alpha'\alpha''+1)\sin\mu=0$	座屈は起きない	$4(\alpha\alpha'\cosh^2\lambda-\alpha'\alpha''\sinh^2\lambda+\sin^2\mu-\alpha'\alpha''\cos^2\mu)=0$

上記の座屈方程式は境界条件として，単純支持は $\begin{bmatrix}\omega\\ M\end{bmatrix}=0$，固定は $\begin{bmatrix}\omega\\ \theta\end{bmatrix}=0$，自由は $\begin{bmatrix}M\\ S\end{bmatrix}=0$ をとっている．図-2に座屈方程式の解を縦軸に $Z=\frac{Q_{cr}}{2\sqrt{kEI}}$（無次元量），横軸に $T=\sqrt[4]{\frac{kL^4}{EI}}$（無次元量）をとり示した．

変断面の柱，地盤反力係数が柱の途中で変わる場合，又軸力が柱の長さ方向で変化する場合は連続梁として解析する．そのときの座屈方程式は，漸化変形法により

$$\det\begin{bmatrix}\mathbb{B}_1 & \mathbb{C}_1 & & \\ & \mathbb{A}_2 & \mathbb{B}_2 & \mathbb{C}_2\\ & & --- & \\ & & \mathbb{A}_n & \mathbb{B}_n\end{bmatrix}=0 \quad ---(5)$$



4. 単径間の圧縮軸力梁　基礎式は(1)，(2)，(3)，(4)式と同じであるが，荷重項が加わるため，積分定数群である固有マトリクスは

$$\mathbb{N}=-\begin{bmatrix}\mathbb{B}\\ \mathbb{B}'\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}0\\ \mathbb{B}'\end{bmatrix}\mathbb{K}$$，（$\mathbb{K}$：荷重マトリクス）---(6) となる．

5. おわりに　谷本，夏目両先生，上條敏彦氏に貴重な意見をいただいたことを附記し，謝意を表します．