I-111　Latticed Shell の一解法

琉球大学　正員 ○ 大 城　武
琉球大学　正員　　渡嘉敷 直彦

1. 序論　Latticed Shellの合理的な構造特性は広く認められ、広い分野において利用されている。その解析法についても、種々の方法が提案されている。一般的には部材の配列がdiscreteである構造物を、等価厚の連続体と見なし、Anisotropic shellとして解析し、微分方程式の解を直接得るか、又は、差分法により数値解を求めている。又、最近の大型電算機の導入は、マトリックス法による解法を可能にしている。しかしながら、これらの方法には、精度及び電算機の容量等の問題がある。ここに述べる解法は、これらの問題を改善しようとするものであり、分類としては、discrete解析のmacro-approach[1],[2] に属するものである。

2. Compatibility Equation

Cylindrical Latticed Shell (Fig. 1)についての解法を述べる。種々の境界条件についても、本解法は可能であるが、最も簡単な場合として四辺がダイヤフラムにより支持された状態を考えている。この構造物の構成部材を大別するとき、曲り梁と直線梁に分けることが出来る。Fig.2及び3に示す如く、格点における反力を未知量として、静定基本系の"r" Beam System (曲り梁) と"S" Beam System (直線梁) として示すことが出来る。ここで、外力は直線梁の任意の格点にかかるものと仮定する。本解法の基本的な原理は、この様に大別した主要構成部材について、各々の解を求め、格点におけるCompatibility Equationから、未知反力を求めようとするものである。その際に級数解及びその直交性を利用すると、非常に簡易化される。

Kernel Function Solution: 曲り梁については、Loveの理論を修正した微分方程式の解として、又、直線梁については、一般的な梁理論を用いて無限級数解をMithaiwala[3],[4] は求めている。本解法は、和分方程式の形となるので、上記の無限級数は、有限級数として書き改めなければならない。その公式は、次のように書ける。[2],[3]

$$\left.\begin{aligned}\sum_{i=0}^{\infty} A_i \cos\frac{i\pi r}{m} &= \sum_{k=0}^{m} C_k \cos\frac{k\pi r}{m}\\ C_k &= A_k + \sum_{I=1}^{\infty}\left(A_{2Im+k} + A_{2Im-k}\right)\end{aligned}\right\}\quad (1a,b)$$

$$\sum_{i=0}^{\infty} A_i \sin\frac{i\pi r}{m} = \sum_{k=0}^{m} C_k \sin\frac{k\pi r}{m} \qquad (2a)$$

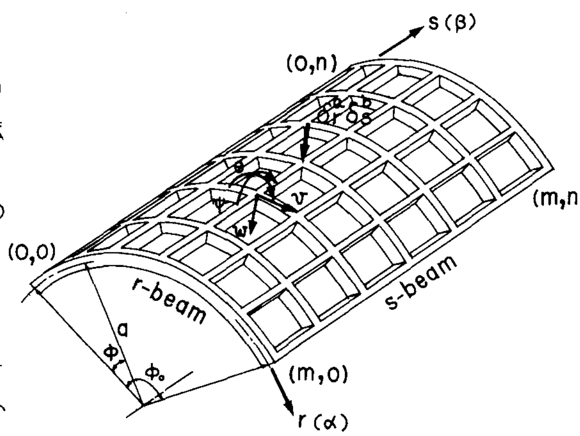

Fig.1 Cylindrical Latticed Shell

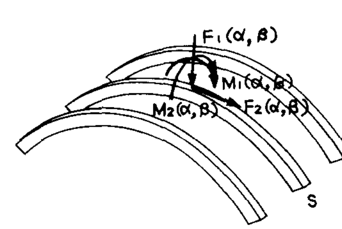

Fig.2 "r" Beam System

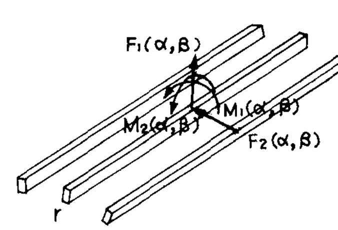

Fig.3 "s" Beam System

$$C_k = A_k + \sum_{I=1}^{\infty}(A_{2Im+k} - A_{2Im-k}) \qquad (2b)$$

Compatibility Equation： "r" Beam Systemの任意の格点(r, s)における垂直方向変位は、Fig.2を参照にして次の様に書ける。

$$W^r(r,s) = \sum_{\alpha=0}^{m}\Big[F_1(\alpha,s)\,w_1(r,\alpha) + F_2(\alpha,s)\,w_2(r,\alpha) + M_1(\alpha,s)\,w_3(r,\alpha)\Big] \qquad (3)$$

ここで、$F_1(\alpha,s)$, $F_2(\alpha,s)$, $M_1(\alpha,s)$は、格点(α,s)における未知反力を表わし、$w_1(r,\alpha)$, $w_2(r,\alpha)$, $w_3(r,\alpha)$は、Kernel Function Solutionを表わす。

同様にして、"s" Beam Systemについても、任意の格点(r,s)における垂直方向変位は、次の様に書ける。

$$W^s(r,s) = -\sum_{\beta=0}^{n}\Big[F_1(r,\beta)\,\overline{w}_1(s,\beta) + M_2(r,\beta)\,\overline{w}_4(s,\beta)\Big] + \delta_r^a\,\overline{w}_5(s,b) \qquad (4)$$

上記の変位は、同一格点において一致しなければならず、又、この条件式は、全格点についても言えることである。従って、次のように和分方程式を書くことが出来る。

$$\sum_r^m\sum_s^n\left[\sum_\alpha^m\Big[F_1(\alpha,s)w_1(r,\alpha)+F_2(\alpha,s)w_2(r,\alpha)+M_1(\alpha,s)w_3(r,\alpha)\Big]+\sum_\beta^n\Big[F_1(r,\beta)\overline{w}_1(s,\beta)+M_2(r,\beta)\overline{w}_4(s,\beta)\Big]\right]$$
$$= \sum_r^m\sum_s^n \delta_r^a\,\overline{w}_5(s,b) \qquad (5)$$

上記の式に、Kernel Function Solution(有限級数解)を代入し、更に、その直交性を用いると、次の式を得る。

$$\left(\frac{A_{k1}}{n}+\frac{A_{l1}}{m}\right)X_1 + \frac{A_{k2}}{n}X_2 + \frac{A_{k3}}{n}X_3 + \frac{A_{l4}}{m}X_4 = \frac{A_{l1}}{m}\sin\frac{k\pi a}{m}\sin\frac{l\pi b}{n} \qquad (6)$$

ここに、

$$\left.\begin{aligned} X_1(k,l) &= \sum_\alpha^m\sum_\beta^n F_1(\alpha,\beta)\sin\frac{k\pi\alpha}{m}\sin\frac{l\pi\beta}{n}, & X_2(k,l) &= w_k\sum_\alpha^m\sum_\beta^n F_2(\alpha,\beta)\cos\frac{k\pi\alpha}{m}\sin\frac{l\pi\beta}{n} \\ X_3(k,l) &= w_k\sum_\alpha^m\sum_\beta^n M_1(\alpha,\beta)\cos\frac{k\pi\alpha}{m}\sin\frac{l\pi\beta}{n}, & X_4(k,l) &= w_l\sum_\alpha^m\sum_\beta^n M_2(\alpha,\beta)\sin\frac{k\pi\alpha}{m}\cos\frac{l\pi\beta}{n} \end{aligned}\right\} \quad (7a,b,c,d)$$

ここで、未知反力は、上記式に直交性を利用し求めることが出来る。同様なCompatibility Equationを接線方向変位，2方向の回転角について書くと、次の結果を得る。

$$\begin{bmatrix} \left(\frac{A_{k1}}{n}+\frac{A_{l1}}{m}\right) & \frac{A_{k2}}{n} & \frac{A_{k3}}{n} & \frac{A_{l4}}{m} \\ \frac{B_{k1}}{n} & \left(\frac{B_{k2}}{n}+\frac{B_{l2}}{m}\right) & \frac{B_{k3}}{n} & 0 \\ \frac{C_{k1}}{n} & \frac{C_{k2}}{n} & \left(\frac{C_{k3}}{n}+\frac{C_{l3}}{m}\right) & 0 \\ \frac{D_{l1}}{m} & 0 & 0 & \left(\frac{D_{k4}}{n}+\frac{D_{l4}}{m}\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{A_{l1}}{m}\sin\frac{k\pi a}{m}\sin\frac{l\pi b}{n} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad (8)$$

上記式より、X_1, X_2, X_3, X_4 を求めると、式(7)より未知反力を求めることが出来る。

参考文献：

(1) Dean, D.L. and GangaRao, H.V.S., A Macro Approach to Discrete Field Analysis, EM4, ASCE, Aug. 1970

(2) GangaRao, H.V.S., et al., Macroapproach for Ribbed and Grid Plate Systems EM1, ASCE, Feb. 1975

(3) Love, A.E.H., A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity, Springer-Verlag

(4) Mithaiwala, A., Micro and Macro Analysis of Cylindrical Ribbed and Latticed Shells. Ph.D. Dissertation University of Delaware, 1968