

北海道大学工学部 正会員 荏澤 憲吉
北海道大学工学部 正会員 芳村 仁

1. はじめに

曲線橋における床版を鋼床版とする場合、その曲線鋼床版の解析においては、次の点に留意する必要がある。(1) 床版の円周方向と半径方向の諸剛性が異なり、異方性を有していること。そして、それは一般に曲線直交異方性であるということ。(2) 横リブの配置型式の関係より、半径方向に剛性の変化する変剛度版であるということ。(3) 床版の上面は車面交通に供されるため、補剛リブが版の下面のみに取付けられた片面補剛版であるということ。

以上の点をすべて考慮して、曲線鋼床版の微小要素の力学的なつりあい条件を用いて基礎方程式を誘導したので、その方程式の検討も含めて報告する。ただし、リブは開断面とした。

2. 基礎方程式の誘導

座標はデッキアローレートの中央面内に r, φ 軸をとり、それと直角下向きに z 軸をとる。デッキアローレートは二次元応力状態、リブは単軸応力状態として取扱ひ、両者の接合部においてひずみの適合を満足させ、リブのねじり剛性をも考慮に入れる。まず、断面力は、

$$\left. \begin{aligned} N_r &= \int_{-t/2}^{t/2} \bar{\sigma}_r dz + \int_{F_r} \bar{\sigma}_r dF_r, & N_\varphi &= \int_{-t/2}^{t/2} \bar{\sigma}_\varphi dz + \int_{F_\varphi} \bar{\sigma}_\varphi dF_\varphi \\ N_{rp} &= N_{\varphi r} = \int_{-t/2}^{t/2} \tau_{r\varphi} dz \\ M_r &= \int_{-t/2}^{t/2} \bar{\sigma}_r z dz + \int_{F_r} \bar{\sigma}_r z dF_r, & M_\varphi &= \int_{-t/2}^{t/2} \bar{\sigma}_\varphi z dz + \int_{F_\varphi} \bar{\sigma}_\varphi z dF_\varphi \\ M_{rp} &= \int_{-t/2}^{t/2} \tau_{r\varphi} z dz + \bar{M}_{rp}, & M_{\varphi r} &= \int_{-t/2}^{t/2} \tau_{\varphi r} z dz + \bar{M}_{\varphi r} \end{aligned} \right\} (1)$$

ここで、 $\bar{\sigma}_r, \bar{\sigma}_\varphi, \tau_{r\varphi}, \tau_{\varphi r}$ はデッキアローレートの応力、 $\bar{\sigma}_r,$

$\bar{\sigma}_\varphi$ はリブの応力、 t はデッキアローレートの板厚、 F_r, F_φ は単位幅あたりのリブの断面積、 $\bar{M}_{rp}, \bar{M}_{\varphi r}$ はリブによって抵抗される単位幅あたりのねじりモーメント。

応力とひずみの関係は、ポアソン比を ν として、

$$\left. \begin{aligned} \bar{\sigma}_r &= [E/(1-\nu^2)](\epsilon_r + \nu \epsilon_\varphi), & \bar{\sigma}_\varphi &= [E/(1-\nu^2)](\epsilon_\varphi + \nu \epsilon_r) \\ \tau_{r\varphi} &= \tau_{\varphi r} = [E/2(1+\nu)] \gamma_{r\varphi} \\ \bar{\sigma}_r &= E \bar{\epsilon}_r, & \bar{\sigma}_\varphi &= E \bar{\epsilon}_\varphi \end{aligned} \right\} (2)$$

一方、変位とひずみの関係は、 $z = z$ の点の r, φ, z 軸方向の変位を u, v, w として、それぞれ、

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_r &= \partial u / \partial r, & \epsilon_\varphi &= (1/r)(\partial v / \partial \varphi + u) \\ \gamma_{r\varphi} &= (1/r)(\partial u / \partial \varphi - v) + \partial v / \partial r \\ \bar{\epsilon}_r &= \partial u / \partial r, & \bar{\epsilon}_\varphi &= (1/r)(\partial v / \partial \varphi + u) \end{aligned} \right\} (3)$$

また、デッキアローレートの中央面での変位 u, v, w と、

u, v, w との関係は、

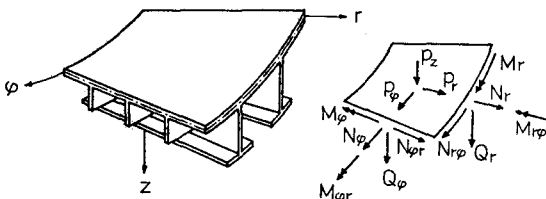
$$\left. \begin{aligned} u &= u - z(\partial w / \partial r), & v &= v - z(1/r)(\partial w / \partial \varphi) \\ w &= w \end{aligned} \right\} (4)$$

であるから、(3)、(4) 式を (2) 式に代入して、

$$\left. \begin{aligned} \bar{\sigma}_r &= \frac{E}{1-\nu^2} \left\{ \frac{\partial u}{\partial r} - z \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \nu \left(\frac{\partial v}{\partial \varphi} - z \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} + u - z \frac{\partial w}{\partial r} \right) \right\} \\ \bar{\sigma}_\varphi &= \frac{E}{1-\nu^2} \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \varphi} - z \frac{\partial^2 w}{r^2 \partial \varphi^2} + \frac{u}{r} - z \frac{\partial w}{\partial r} + \nu \left(\frac{\partial u}{\partial r} - z \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \right) \right\} \\ \tau_{r\varphi} &= \frac{E}{2(1+\nu)} \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi} + \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} + 2z \frac{1}{r^2} \frac{\partial w}{\partial \varphi} - 2z \frac{1}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial \varphi} \right\} \\ \bar{\sigma}_r &= E \left\{ \frac{\partial u}{\partial r} - z \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \right\} \\ \bar{\sigma}_\varphi &= E \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \varphi} + \frac{u}{r} - z \frac{\partial w}{\partial r} - \frac{z}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} \right\} \end{aligned} \right\} (5)$$

従って断面力と変位の関係は (5) 式を (1) 式に代入して、

$$\left. \begin{aligned} N_r &= \frac{Et}{1-\nu^2} \left\{ \frac{\partial u}{\partial r} + \nu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \varphi} + \frac{u}{r} \right) \right\} + E \left\{ F_r \frac{\partial u}{\partial r} - S_r \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \right\} \\ N_\varphi &= \frac{Et}{1-\nu^2} \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \varphi} + \frac{u}{r} + \nu \frac{\partial u}{\partial r} \right\} + E \left\{ F_\varphi \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \varphi} + \frac{u}{r} \right) - S_\varphi \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} \right) \right\} \\ N_{rp} &= N_{\varphi r} = \frac{Et}{2(1+\nu)} \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi} + \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} \right\} \\ M_r &= -\frac{Et^3}{12(1-\nu^2)} \left\{ \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \nu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} \right) \right\} + E \left\{ S_r \frac{\partial u}{\partial r} - J_r \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \right\} \\ M_\varphi &= -\frac{Et^3}{12(1-\nu^2)} \left\{ \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} \right) + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \right\} \\ &\quad + E \left\{ S_\varphi \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \varphi} + \frac{u}{r} \right) - J_\varphi \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} \right) \right\} \end{aligned} \right\} (6)$$



曲線鋼床版の要素と断面力

$$M_{rp} = \left\{ -\frac{Et^3}{12(1+\nu)} - 2B_{rp} \right\} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial \varphi} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial w}{\partial \varphi} \right)$$

$$M_{pr} = \left\{ -\frac{Et^3}{12(1+\nu)} - 2B_{pr} \right\} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial \varphi} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial w}{\partial \varphi} \right)$$

ここで、 $2B_{rp}$, $2B_{pr}$ は単位幅あたりのリブのねじり剛性、 S_r , S_φ , J_r , J_φ は単位幅あたりのリブの $Z=0$ 面に關する断面一次および二次モーメント。

断面力の間には、フリアーにより次の關係が成立する。 P_r , P_φ , P_z を作用している荷重強度として、

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial N_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial N_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{1}{r} (N_r - N_\varphi) &= -P_r \\ \frac{1}{r} \frac{\partial N_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial N_{rp}}{\partial r} + \frac{1}{r} (N_{rp} + N_{pr}) &= -P_\varphi \\ -\frac{\partial^2 M_r}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \left(2 \frac{\partial M_r}{\partial r} - \frac{\partial M_\varphi}{\partial r} \right) - \frac{1}{r} \left(\frac{\partial^2 M_{rp}}{\partial r \partial \varphi} + \frac{\partial^2 M_{pr}}{\partial r \partial \varphi} \right) \\ - \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial M_{rp}}{\partial \varphi} + \frac{\partial M_{pr}}{\partial \varphi} \right) - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 M_\varphi}{\partial \varphi^2} &= P_z \end{aligned} \right\} (7)$$

この(7)式に(6)式を代入してやると変位に関する方程式が得られる。この場合、一般に F_r , S_φ , J_φ は r , φ に関して一定であるが、 F_r , S_r , J_r は r の関数であることに注意すると、その最終結果は、

$$\left. \begin{aligned} \bar{F}_r &= \{ t^2 / (1-\nu^2) \} + F_r, \quad \bar{F}_\varphi = \{ t^2 / (1-\nu^2) \} + F_\varphi \\ \bar{J}_r &= \{ t^3 / 12(1-\nu^2) \} + J_r, \quad \bar{J}_\varphi = \{ t^3 / 12(1-\nu^2) \} + J_\varphi \\ \bar{J}_{rp} &= \{ t^3 / 12(1-\nu^2) \} + (1/E) (B_{rp} + B_{pr}) \end{aligned} \right\} (8)$$

という記号を用いて、

$$\begin{aligned} &\bar{F}_r \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \right) - \bar{F}_\varphi \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} + \frac{u}{r^2} \right) + \frac{t}{2(1+\nu)} \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial w}{\partial \varphi} \right) \\ &+ \frac{t}{2(1-\nu)} \frac{1}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial \varphi} + \frac{\partial F_r}{\partial r} \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{\partial S_r}{\partial r} \frac{\partial w}{\partial r^2} \\ &- S_r \left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} \right) + S_\varphi \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial w}{\partial r} \right) = -\frac{P_r}{E} \quad \dots\dots (9.1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\bar{F}_\varphi \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial u}{\partial \varphi} \right) + \frac{t}{2(1+\nu)} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} - \frac{u}{r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial u}{\partial \varphi} \right) \\ &+ \frac{t}{2(1-\nu)} \frac{1}{r} \frac{\partial^2 u}{\partial r \partial \varphi} - S_\varphi \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial w}{\partial r} \right) = -\frac{P_\varphi}{E} \quad \dots\dots (9.2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\bar{J}_r \frac{\partial^4 w}{\partial r^4} + 2(\bar{J}_r + r \frac{\partial \bar{J}_r}{\partial r}) \frac{1}{r} \frac{\partial^3 w}{\partial r^3} - (\bar{J}_r - 2r \frac{\partial \bar{J}_r}{\partial r} - r^2 \frac{\partial^2 \bar{J}_r}{\partial r^2}) \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \\ &+ \bar{J}_\varphi \frac{1}{r^3} \frac{\partial w}{\partial r} + 2\bar{J}_{rp} \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial r^2 \partial \varphi} - 2(\bar{J}_{rp} - r \frac{\partial \bar{J}_{rp}}{\partial r}) \frac{1}{r^3} \frac{\partial w}{\partial r \partial \varphi} \\ &+ 2(\bar{J}_\varphi + \bar{J}_{rp} - \frac{r}{E} \frac{\partial B_{rp}}{\partial r}) \frac{1}{r^4} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} + \bar{J}_\varphi \frac{1}{r^4} \frac{\partial^4 w}{\partial \varphi^4} \\ &- S_r \frac{\partial^4 u}{\partial r^4} - 2 \left(\frac{S_r}{r} + \frac{\partial S_r}{\partial r} \right) \frac{\partial^3 u}{\partial r^3} - \left(\frac{2}{r} \frac{\partial S_r}{\partial r} + \frac{\partial^2 S_r}{\partial r^2} \right) \frac{\partial u}{\partial r} \\ &- S_\varphi \left\{ \frac{1}{r^3} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \left(\frac{\partial w}{\partial \varphi} + u \right) - \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial w}{\partial \varphi} + u \right) + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial w}{\partial \varphi} + u \right) \right\} = \frac{P_z}{E} \quad \dots\dots (9.3) \end{aligned}$$

と得られる。これが、曲線鋼床版の基礎方程式である。もし、横リブの断面が半径方向に一定であって、その配置が曲率の中に放射状であれば、 F_r , S_r , J_r , B_{rp} は半径の逆数に比例することから、一般に、

$f_r = f_0 (r_0/r)$, $f_0: r=r_0$ の値 (10)
とおかされよう。

3. 基礎方程式の検討

基礎方程式の三式のうち、(9.1), (9.2) 式は面内変形に関する式、(9.3) 式は曲げ変形に関する式であるが、これらは独立には取扱えないことは明らかである。

ただし、面内対称補剛板のように、 $S_r = S_\varphi = 0$ である場合には、方程式は、

$$\begin{aligned} &\bar{F}_r \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \right) - \bar{F}_\varphi \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} + \frac{u}{r^2} \right) + \frac{t}{2(1+\nu)} \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial w}{\partial \varphi} \right) \\ &+ \frac{t}{2(1-\nu)} \frac{1}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial \varphi} + \frac{\partial F_r}{\partial r} \frac{\partial u}{\partial r} = -\frac{P_r}{E} \quad \dots\dots (11.1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\bar{F}_\varphi \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial u}{\partial \varphi} \right) + \frac{t}{2(1+\nu)} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} - \frac{u}{r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial u}{\partial \varphi} \right) \\ &+ \frac{t}{2(1-\nu)} \frac{1}{r} \frac{\partial^2 u}{\partial r \partial \varphi} = -\frac{P_\varphi}{E} \quad \dots\dots (11.2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\bar{J}_r \frac{\partial^4 w}{\partial r^4} + 2(\bar{J}_r + r \frac{\partial \bar{J}_r}{\partial r}) \frac{1}{r} \frac{\partial^3 w}{\partial r^3} - (\bar{J}_r - 2r \frac{\partial \bar{J}_r}{\partial r} - r^2 \frac{\partial^2 \bar{J}_r}{\partial r^2}) \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \\ &+ \bar{J}_\varphi \frac{1}{r^3} \frac{\partial w}{\partial r} + 2\bar{J}_{rp} \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial r^2 \partial \varphi} - 2(\bar{J}_{rp} - r \frac{\partial \bar{J}_{rp}}{\partial r}) \frac{1}{r^3} \frac{\partial w}{\partial r \partial \varphi} \\ &+ 2(\bar{J}_\varphi + \bar{J}_{rp} - \frac{r}{E} \frac{\partial B_{rp}}{\partial r}) \frac{1}{r^4} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} + \bar{J}_\varphi \frac{1}{r^4} \frac{\partial^4 w}{\partial \varphi^4} = \frac{P_z}{E} \quad \dots\dots (11.3) \end{aligned}$$

となり、面内変形と曲げ変形の式に分かれる。特に(11.3)式は、補剛板と充実板の違いにより諸剛性の評価は異なるが、曲線直交異性変厚板の曲げの方程式と同形である。またさらに、異性性が位置によって変化しない場合を考えて、この(11.3)式の J_r , B_{rp} の偏微分項を消すと、等厚板の曲げの方程式²⁾に対応することがわかる。

また、(9.1, 2, 3) 式において、 $r \rightarrow \infty$, $\partial/\partial r \rightarrow \partial/\partial x$, $(1/r)(\partial/\partial \varphi) \rightarrow \partial/\partial y$ として直交座標系に変換すると、直線鋼床版について Giencke が誘導した方程式³⁾に一致する。したがって、曲線鋼床版に関する基礎方程式(9.1, 2, 3) 式は、直線鋼床版に関する Giencke 式を極座標系へ拡張したものと考えられる。(参考文献)

- 1) 芳村仁：土木学会論文集，No. 86，1962-10，P. 20
No. 89，1963-1，P. 31
- 2) 芳村仁：土木学会論文集，No. 82，1962-6，P. 1
- 3) Giencke, E.: Stahlbau, 24, 1955, S. 128