

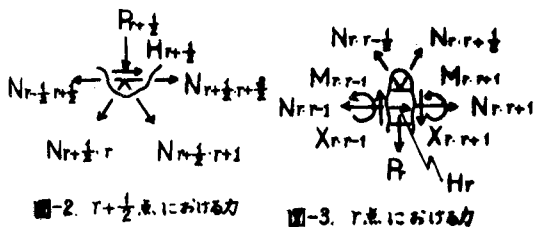
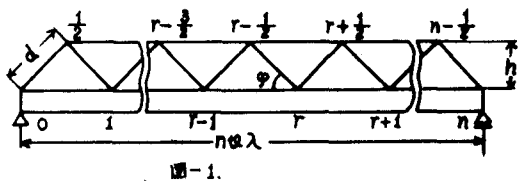
岩手大学工学部 正員 岩崎正二
北海道大学工学部 正員 能町純雄

1. まえがき

トラスとガーダーは荷重をになう機能をもつものであるが、構造的には全く異なるものである。ガーダーは充
実した連続体であり、トラスは肉を取り去った骨組である。この相異なる二つの種をかけ合わせてできる構造物
の力学的性質を検討しようとするのが本報告の目的である。ここではこのような構造物として、ガーダーとこの
ガーダーを補剛するトラスからなるトラストガーダーを考え応力解析を行なう。解析にあたっては部材の規則性
を仮定するので求むべき変位、たわみ角が連立差分方程式の形で与えられる。これらの差分方程式は連続の数字
における有限なフーリエ積分変換と相似に、フーリエ有限和変換とその逆変換式を用いることで容易に解析
できる。なおガーダーを補剛するトラスの型式はワーレントラスとする。

2. トラストガーダーの解式

図1に示すようなワレントラスによって補剛されたガーダーを考え、上弦 $r + \frac{1}{2}$ 点の水平、鉛直変位をそれぞれ $U_{r+\frac{1}{2}}$, $W_{r+\frac{1}{2}}$, 下弦 r 点の各変位とたわみ角を U_r , W_r , θ_r とする。ここで格点はすべてヒンジ結合されていると仮定する。図2, 図3から r 点と $r + \frac{1}{2}$ 点のまわりの水平、鉛直方向の力のつりあい, さらに r 点におけるモーメントのつりあいから5本のつりあい式が求まる。このつりあい式をフックの法則とたわみ角公式を使って変位の項で表わすと次のような5元の連立差分方程式となる。



$$\frac{2E_3A_3}{\lambda} \{C^3(\nabla u_{r-\frac{1}{2}} - 2u_r) - C^2S\Delta W_{r-\frac{1}{2}}\} + \frac{E_1A_1}{\lambda} \Delta^2 u_{r-1} + H_r = 0 \quad (1)$$

$$\frac{2E_3A_3}{\lambda} \{c^3(\nabla u_r - 2u_{r+\frac{1}{2}}) + c^2S\Delta w_r\} + \frac{E_2A_2}{\lambda} \Delta^2 u_{r-\frac{1}{2}} + H_{r+\frac{1}{2}} = 0 \quad (2)$$

$$\frac{2E_3 A_3}{\lambda} \{ c^2 S \Delta U_{r-\frac{1}{2}} - C S^2 (\nabla W_{t-\frac{1}{2}} - 2W_r) \} + \frac{6E_1 I}{\lambda^2} (\Delta \theta_r - 2\Delta^2 W_{r-1}/\lambda) = P_r \quad (3)$$

$$\frac{2E_3 A_3}{\lambda} \{ C^2 S \Delta U_r - C S^2 (\nabla W_r - 2 W_{r+\frac{1}{2}}) \} - P_{r+\frac{1}{2}} = 0 \quad (4)$$

$$\frac{2E_1 I}{\lambda} (\Delta^2 \theta_{r-1} + 6\theta_r - 3\Delta W_r / \lambda) + \frac{e E_1 A_1}{\lambda} \Delta^2 U_{r-1} + e H r = 0 \quad (5)$$

ただし $\Delta f_r = f_{r+1} - f_r$, $\Delta^2 f_{r-1} = f_{r+1} - 2f_r + f_{r-1}$,

$$\Delta f_r = f_{r+1} - f_{r-1}, \nabla f_r = f_{r+1} + f_r, C = \cos \varphi, S = \sin \varphi.$$

上式中 $A_1, A_2, A_3, E_1, E_2, E_3$ はそれぞれガーダー、上弦材、斜材の断面積と弾性定数、 I はガーダーの断面2次モーメント、 l はパネル長、 e はガーダー上縁から重心までの距離である。

上式(1)~(5)式で与えられる基本差分方程式にフーリエ定積分変換を施す。すなわち(1)(5)式に cosine 変換, (3)式に sine 変換, (2)(4)式に half sine 変換を作用させ境界条件を考慮すると次のようなマトリックス方程式となる。

この方程式を解くと定積分変換形での変位、たわみ角が求まり逆変換を行なうことにより実際の変位、たわみ角が求まる。これにより所要の応力、モーメントを求めることができる。

$$\begin{bmatrix} \frac{4E_3A_3}{\lambda} \frac{c^2}{E_1A_1} D_i & -\frac{4E_3A_3}{\lambda} c^3 \cos \frac{i\pi}{2n} & 0 & \frac{4E_3A_3}{\lambda} c^2 \sin \frac{i\pi}{2n} & 0 \\ -\frac{4E_3A_3}{\lambda} c^3 \cos \frac{i\pi}{2n} & \frac{4E_3A_3}{\lambda} \frac{c^3}{E_3A_3} D_i & -\frac{4E_3A_3}{\lambda} c^2 \sin \frac{i\pi}{2n} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{4E_3A_3}{\lambda} c^2 \sin \frac{i\pi}{2n} & \frac{4E_3A_3}{\lambda} \frac{c^2}{E_3A_3} D_i & -\frac{4E_3A_3}{\lambda} c^2 \cos \frac{i\pi}{2n} & -\frac{12EI}{\lambda^2} \sin \frac{i\pi}{n} \\ \frac{4E_3A_3}{\lambda} c^2 \sin \frac{i\pi}{2n} & 0 & -\frac{4E_3A_3}{\lambda} c^2 \cos \frac{i\pi}{2n} & \frac{4E_3A_3}{\lambda} c^2 & 0 \\ \frac{eE_1A_1}{\lambda} D_i & 0 & \frac{12EI}{\lambda^2} \sin \frac{i\pi}{n} & 0 & -\frac{2EI}{\lambda} (6-D_i) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_i[U_r] \\ \bar{C}_i[U_{r+\frac{1}{2}}] \\ S_i[W_r] \\ \bar{S}_i[W_{r+\frac{1}{2}}] \\ R_i[\theta_r] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-1)^i H_n + H_0 + C_i[H_r] \\ \bar{C}_i[H_{r+\frac{1}{2}}] \\ S_i[P_r] - \frac{12EI}{\lambda^2} \sin \frac{i\pi}{n} \{(-1)^i W_n - W_0\} \\ \bar{S}_i[P_{r+\frac{1}{2}}] \\ e \{(-1)^i H_n + H_0 + C_i[H_r]\} - \frac{3EI}{\lambda^2} (4-D_i) \{(-1)^i W_n - W_0\} \end{bmatrix}$$

ただし $R_i[U_r] = \sum_{j=0}^{n-1} U_r \cos \frac{j\pi}{n} r + \frac{U_n}{2} (-1)^i + \frac{U_0}{2}$, $\bar{C}_i[U_{r+\frac{1}{2}}] = \sum_{j=0}^{n-1} U_{r+\frac{1}{2}} \cos \frac{j\pi}{n} (r+\frac{1}{2})$,
 $S_i[W_r] = \sum_{j=0}^{n-1} W_r \sin \frac{j\pi}{n} r$, $\bar{S}_i[W_{r+\frac{1}{2}}] = \sum_{j=0}^{n-1} W_{r+\frac{1}{2}} \sin \frac{j\pi}{n} (r+\frac{1}{2})$, $R_i[\theta_r] = \sum_{j=0}^{n-1} \theta_r \cos \frac{j\pi}{n} r + \frac{\theta_n}{2} (-1)^i + \frac{\theta_0}{2}$,
 $C_i[H_r] = \sum_{j=0}^{n-1} H_r \cos \frac{j\pi}{n} r$, $D_i = 2(1 - \cos \frac{i\pi}{n})$.

今両端単純支持とし水平外力も作用していないとする。さらに単位荷重 P が第 r 点に作用したとすると

$$C_i[H_r] = \bar{C}_i[H_{r+\frac{1}{2}}] = \bar{S}_i[P_{r+\frac{1}{2}}] = H_n = H_0 = W_n = W_0 = 0, S_i[P_r] = P \sin \frac{i\pi}{n} \xi.$$

解式の一例を示すと部材力とたわみに関しては次のようになる。

$$N_{r-\frac{1}{2}} = \frac{PJ\lambda}{h} \left\{ \frac{6}{K} \left[\frac{r(n-\xi)}{\xi(n-r)} + \left(\frac{6}{K} - \frac{1}{H} \right) G(r, \xi) \right] \right\} \begin{matrix} r < \xi \\ r \geq \xi \end{matrix} \quad (7) \quad N_{r+r} = \frac{PJ\lambda}{2h} \left\{ \frac{6}{K} \left[\frac{n-\xi}{\xi} (2n-2r+1) + \left(\frac{1}{H} - \frac{6}{K} \right) G(r, \xi) \right] \right\} \begin{matrix} r < \xi \\ r \geq \xi \end{matrix} \quad (8)$$

$$N_{r+r} = \frac{PJ\lambda}{h} \left\{ \frac{6}{K} \left[\frac{n-\xi}{\xi} + \left(\frac{6}{K} - \frac{1}{H} \right) G(r, \xi) \right] \right\} \begin{matrix} r < \xi \\ r \geq \xi \end{matrix} \quad (9) \quad N_{r-\frac{1}{2}} = \frac{PJ\lambda}{h} \left\{ \frac{6}{K} \left[-\frac{n-\xi}{\xi} + \left(\frac{1}{H} - \frac{6}{K} \right) G(r-1, \xi) \right] \right\} \begin{matrix} r < \xi \\ r \geq \xi \end{matrix} \quad (10)$$

$$W_r = PJ\lambda \left\{ \left(\frac{6\alpha_1}{K} - \frac{6\alpha_2 H}{K^2} \right) \frac{r(n-\xi)}{\xi(n-r)} + \left(1 - \frac{\alpha_2}{K} \right) \left\{ \frac{r(n-\xi)}{\xi(n-r)} \{ \xi(2n-\xi) - r^2 \} + \frac{(K\alpha_1 - H\alpha_2)(K-6H)}{K^2 H} G(r, \xi) \right\} \right\} \begin{matrix} r < \xi \\ r \geq \xi \end{matrix} \quad (11)$$

ここで $J = \frac{\lambda^2}{6EI}$, $\mu = \frac{e}{h}$, $\alpha_1 = J(1 + \frac{2}{3}\mu)$, $\alpha_2 = 6J(1 + \mu)$, $K = \alpha_2 + \frac{\lambda^2}{h^2} \left(\frac{1}{E_1A_1} + \frac{1}{E_2A_2} \right)$, $H = J(1 + \frac{2}{3}\mu) + \frac{\lambda^2}{4E_1A_1 h^2} - \frac{2d^3}{E_3A_3 h^2 \lambda^2}$,

$$G(r, \xi) = \begin{cases} \frac{\sinh \alpha(n-\xi) \cdot \sinh \alpha r}{\sinh \alpha \cdot \sinh \alpha n} & r < \xi \\ \frac{\sinh \alpha \xi \cdot \sinh \alpha(n-r)}{\sinh \alpha \cdot \sinh \alpha n} & r \geq \xi \end{cases} \quad \text{for } \frac{K}{2H} \leq 0, \quad \alpha = \cosh^{-1} \left| \frac{2-K/H}{2} \right|.$$

3. 数値計算例

(7)~(11)式中 r は注目する格点または部材で ξ を変化させることにより影響線を求めることができる。数値計算に対する諸係数は次の値である。

$$E_1 = E_2 = E_3 = 2.1 \times 10^{10} \text{ kg/m}^2$$

$$A_2 = (a) 0.001 \text{ m}^2, (b) 0.002 \text{ m}^2, (c) 0.005 \text{ m}^2$$

$$A_1 = 0.005 \text{ m}^2, A_3 = 0.03 \text{ m}^2, I = 0.006036 \text{ m}^4$$

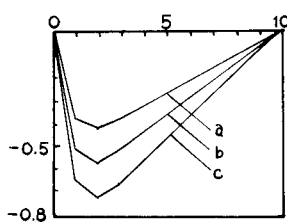
$$\lambda = 3 \text{ m}, n = 10, h = 2 \text{ m}, d = 2.5 \text{ m}, e = 0.52 \text{ m}$$

(参考文献)

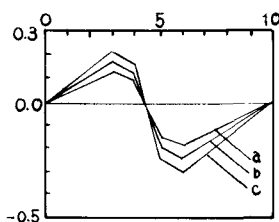
Nomachi, Matsuoka; Application of Finite Fourier Intergration Transforms for Structural Mechanics. (1970)

Nomachi; On Stress Analysis of Trussed

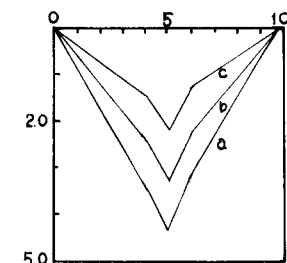
Girders. (1961)



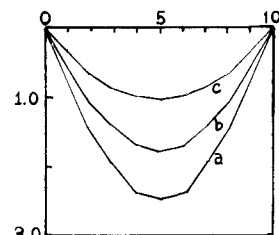
(kg) 図-4. $N_{1/2}$ -影響線



(kg) 図-5. $N_{3/2}$ -影響線



(kg.m) 図-6. $M_{6/6}$ -影響線



($\times 10^{-6} \text{ m}$) 図-7. W_5 -影響線