

長崎大学工学部 正員 崎山 毅

1. まえがき アーチの自由振動に關して、多くの研究がなされてきている。Den Hartog による2ヒンジおよび固定アーチの基本振動数の算定、単ヒンジアーチに關する三浦の研究、軸伸縮の影響を考慮し、振動方程式の厳密解を求めた Wallking の研究などが先駆的な研究である。さらに、3ヒンジアーチに關する著者の研究あるいは2ヒンジおよび固定アーチの10次程度までの高次振動数を求めた Vatzatos の研究などがあるが、こゝらはいずれも基礎式の解析的取扱いが比較的容易な円弧アーチを対象としている。非円弧アーチに關しては低放物線アーチに關する最上の研究や Cycloid, Catenary および放物線のアーチを解析した Valterra の研究があるが、なお、非円形アーチの振動性状に關して十分な解析が行われていないと云い難い。本研究は、最も一般的なアーチである、任意平面曲線と軸線とする変断面アーチの自由振動性状を解析したものである。

2. 任意形・変断面アーチの自由振動方程式 アーチの材軸の法線方向および接線方向の変位を u および w とし、たわみ角、曲げモーメント、軸力およびせん断力を θ, M, N および Q とする。断面2次モーメント、断面積、単位容積質量、曲率半径、弾性定数、横弾性定数、せん断係数をとれば I, A, ρ, R, E, G, K とすれば、任意形・変断面アーチの自由振動は、軸伸縮、回転慣性およびせん断変形を考慮して、次の各式で表わされる。

$$\frac{\partial Q}{\partial S} + \frac{N}{R(s)} - \rho A(s) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, \quad \frac{\partial N}{\partial S} - \frac{Q}{R(s)} - \rho A(s) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0, \quad \frac{\partial M}{\partial S} - Q + \rho I(s) \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} = 0$$

$$M = -EI(s) \frac{\partial \theta}{\partial S}, \quad N = EA(s) \left[\frac{\partial w}{\partial S} - \frac{u}{R(s)} \right], \quad Q = \frac{GA(s)}{K} \left[\frac{\partial u}{\partial S} + \frac{w}{R(s)} - \theta \right]$$

ここに、 S はアーチ部材軸に沿う座標である。諸量の基準函数の、アーチ部材等分要素 i における、離散的な一般解は次のようになる。等分要素番号はアーチ部材の左から右へ $0, 1, 2, \dots, i, \dots, n$ とする。

$$\begin{bmatrix} \bar{Q}_i \\ \bar{N}_i \\ \bar{M}_i \\ \bar{\theta}_i \\ \bar{w}_i \\ \bar{u}_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{1i} & a_{2i} & a_{3i} & a_{4i} & a_{5i} & a_{6i} \\ b_{1i} & b_{2i} & b_{3i} & b_{4i} & b_{5i} & b_{6i} \\ c_{1i} & c_{2i} & c_{3i} & c_{4i} & c_{5i} & c_{6i} \\ d_{1i} & d_{2i} & d_{3i} & d_{4i} & d_{5i} & d_{6i} \\ e_{1i} & e_{2i} & e_{3i} & e_{4i} & e_{5i} & e_{6i} \\ f_{1i} & f_{2i} & f_{3i} & f_{4i} & f_{5i} & f_{6i} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \bar{Q}_0 \\ \bar{N}_0 \\ \bar{M}_0 \\ \bar{\theta}_0 \\ \bar{w}_0 \\ \bar{u}_0 \end{bmatrix}, \quad a_{ki} = a_{k0} - \sum_{j=1}^i \beta_{i,j} \left[\frac{L}{R_j} b_{kj} - \lambda^4 \frac{A_j}{A_0} f_{kj} \right]$$

$$a_{k0} = 0 \quad (k \neq 1), \quad a_{10} = 1$$

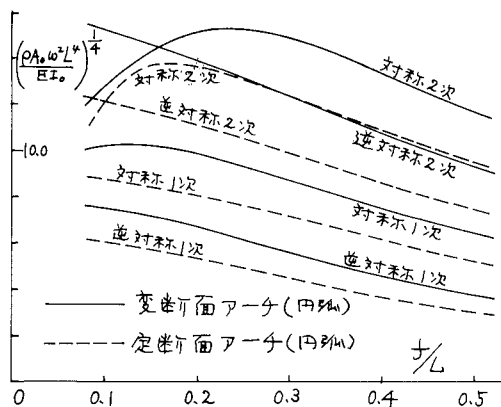
$$\dots \dots \dots$$

$$L: \text{アーチ軸長}, \quad \lambda^4 = \rho A_0 \omega^2 L^4 / EI_0$$

$$\omega: \text{固有角振動数}, \quad \beta_{i,j}: \text{Simpson 則による係数}$$

$$f: \text{アーチのライス}, \quad L: \text{アーチの支間}$$

3. 任意形・変断面アーチの自由振動特性 一例として、矩形断面を有し、断面高さが h , $h(\eta) = h_0(1 + \sin \pi \eta)$ と変化する2ヒンジアーチの自由振動性状を示す。この例においては $(A_0 L^2 / I_0)^{1/4} = 200$, $G / 14E = 0.2564$ とした。



型	L/L_0	放物線	Catenary	Cycloid	型	L/L_0	放物線	Catenary	Cycloid
逆対称一次	0.1	1.00	1.00	1.00	対称二次	0.1	1.01	1.01	1.00
	0.2	1.02	1.01	0.99		0.2	1.05	1.03	0.98
	0.3	1.06	1.04	0.96		0.3	1.08	1.07	0.93
	0.4	1.13	1.10	—		0.4	1.13	1.11	—
	0.5	1.21	1.16	—		0.5	1.17	1.15	—
逆対称二次	0.1	1.00	1.00	1.00	対称一次	0.1	0.98	0.99	1.01
	0.2	1.01	1.01	0.99		0.2	0.96	0.97	1.01
	0.3	1.04	1.03	0.96		0.3	1.01	1.01	0.96
	0.4	1.07	1.06	—		0.4	1.06	1.05	—
	0.5	1.11	1.10	—		0.5	1.09	1.08	—

(円弧アーチの固有値に対する各種アーチの固有値の比)