

九州大学工学部 学生員 平田 勝啓
 " 正員 大塚 久哲
 " " 吉村 虎蔵

1. まえがき 本研究は、曲線桁橋を扇形床板、曲線主桁、および横桁（横構・対傾構は横桁と同様に取り扱う）の3構成要素からなる複合構造物とみて、これら構成要素間の偏心結合を考慮した曲線桁橋の解法を提示する。これによれば曲線格子桁理論、曲線直交異方性板理論、薄肉曲線はり理論では説明が不十分であった各構成要素間の力学的相互作用が把握できる。解析手法には、変位法と結合法を併用する。

2. 解法 扇形床板の剛性方程式を有限帯板法(FSM)により、曲線主桁のそれをフーリエ級数展開により、横桁のそれを有限要素法(FEM)によりそれぞれ求める。扇形床板と曲線主桁からなる構造（以下、基本構とよぶ）は通常のFSMにより解析できる。横桁などを有する曲線桁橋では、結合法により基本構と横桁との結合力を求め、外荷重とこの結合力を同時に基本構に作用させて解析する。

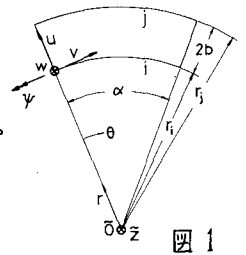


図1

2-1) 扇形床板および曲線主桁の剛性方程式 扇形床板と図1のような扇形帯板要素に分割するとき、変位 u, v, w の変位関数は、円周方向に級数展開、半径方向に多項式近似して仮定できる。この変位関数を用いて、ひずみ・曲率と変位の関係式およびモーメント・平面応力と変位の関係式を求め、ポテンシャルエネルギー最小の原理を適用すれば扇形帯板要素の剛性方程式を得る²⁾。次に、曲線主桁の中立点を連ねた軸（以下、中立線と略称）に関する断面力と中立線の変形に関する幾何学量との関係は、次式で与えられる（図2）。

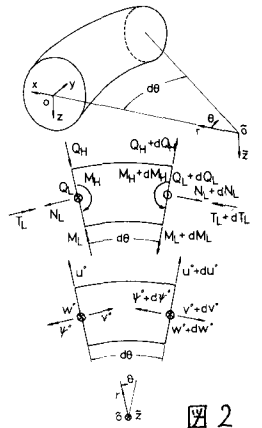


図2

$$\begin{Bmatrix} N_L \\ M_L \\ M_H \\ M_W \\ T_L S \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} E_L A_L & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E_L I_x & E_L I_{xz} & E_L C_x & 0 \\ 0 & E_L I_{xz} & E_L I_z & E_L C_z & 0 \\ 0 & E_L C_x & E_L C_z & E_L C_w & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G_L J_L \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_L \\ \kappa_t \\ \kappa_h \\ \kappa_w \\ \kappa_o \end{Bmatrix} = [D_L] \{ \epsilon_L \} \quad \dots (1)$$

ここに M_W は曲げねじりモーメント、 $T_L S$ は純ねじりモーメント。式(1)の $\{ \epsilon_L \}$ の各要素を、曲線主桁中立点鉛直上方に e_L だけ隔たって位置する板の中立面上の変位 u, v, w, ψ で表わせば次式となる。

$$\begin{aligned} \epsilon_L &= \frac{1}{R_0} \left(\frac{dv}{d\theta} - \frac{e_L}{R_0} \frac{d^2 w}{d\theta^2} + u - e_L \psi \right), & \kappa_t &= -\frac{1}{R_0^2} \left(\frac{d^2 w}{d\theta^2} + R_0 \psi \right), & \kappa_h &= \frac{1}{R_0^2} \left(\frac{d^2 u}{d\theta^2} - e_L \frac{d^2 \psi}{d\theta^2} - \frac{dv}{d\theta} + \frac{e_L}{R_0} \frac{d^2 w}{d\theta^2} \right) \\ \kappa_w &= \frac{1}{R_0^2} \left(-\frac{d^2 \psi}{d\theta^2} + \frac{1}{R_0} \frac{d^2 w}{d\theta^2} \right), & \kappa_o &= \frac{1}{R_0} \left(\frac{d\psi}{d\theta} - \frac{1}{R_0} \frac{dw}{d\theta} \right) & R_0 &: \text{中立線の曲率半径} \end{aligned} \quad \dots (2)$$

曲線主桁と扇形床板の接合線上に帯板要素の節線をとれば、接合線での板の変位は節線の変位で表わせるから、

$$u = \sum U_{im} S_m, \quad v = \sum V_{im} C_m, \quad w = \sum W_{im} S_m, \quad \psi = \sum \psi_{im} S_m \quad \text{ここに } S_m = \sin \frac{m\pi\theta}{\alpha}, \quad C_m = \cos \frac{m\pi\theta}{\alpha} \quad \dots (3)$$

式(2), (3)よりベクトル $\{ \epsilon_L \}$ は次式で与えられる。 $\{ \epsilon_L \} = \sum [A_m] \{ W_m \}$, $\{ W_m \} = \{ U_{im}, V_{im}, W_{im}, \psi_{im} \}^T$ $\dots (4)$

したがって、ポテンシャルエネルギー最小の原理より曲線主桁の第 m 項の剛性行列は次式で求められる。

$$[S_{gm}] = \int_0^\alpha [A_m]^T [D_L] [A_m] r d\theta \quad \dots (5)$$

2-2) 横桁の剛性行列 曲線桁橋の横桁を、その力学的性状から判断して図3に示す1節点4自由度の直線部材として扱うことにすれば、その剛性方程式はFEMにより次式で表わせる。

$$\{ \bar{N}_i, \bar{V}_i, \bar{M}_{xi}, \bar{N}_j, \bar{V}_j, \bar{M}_{xj} \}^T = [K] \{ \bar{u}_i, \bar{w}_i, \bar{\theta}_{xi}, \bar{u}_j, \bar{w}_j, \bar{\theta}_{xj} \}^T \quad \dots (6)$$

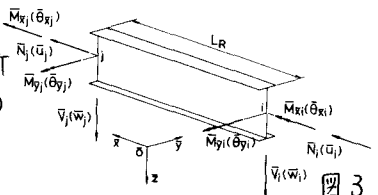


図3

2-3) 基本構と横桁との結合の手順

(a) 基本系($X_{(1)}$ 系) 基本構に外荷重 $\{X_{(1)}\}$ が作用する(基本)系をFSMで解き、横桁との結合点での変位ベクトル $\{\bar{d}_{(1)}\}$ を求める。右下の添字(1)は基本系であることを示す(以下同様)。変位の第1添字は円周方向の結合点(主桁と横桁との)番号を、第2添字は半径方向の結合点番号を示す。 $[B]$ は桁の変位と板の変位を関係づける行列である。ベクトルおよびその要素の $\bar{\quad}$ は横桁の値であることを示し、 $\bar{\quad}$ がないものは板の値であることを示す。

$$\{\bar{d}_{(1)}\} = \{\{\bar{\zeta}_{(1)}\} \{\bar{\varphi}_{(1)}\}\}^T = [B]^{-1} \{\{\zeta_{(1)}\} \{\varphi_{(1)}\}\}^T \quad \dots (7)$$

ここに、 $\{\bar{\zeta}_{(1)}\} = \{\bar{u}_{11} \bar{w}_{11} \bar{\theta}_{z11} \dots \bar{u}_{1m} \bar{w}_{1m} \bar{\theta}_{z1m} \dots \bar{u}_{21} \bar{w}_{21} \bar{\theta}_{z21} \dots \bar{u}_{2m} \bar{w}_{2m} \bar{\theta}_{z2m}\}_{(1)}$, $\{\bar{\varphi}_{(1)}\} = \{\bar{\theta}_{x11} \dots \bar{\theta}_{x1m} \dots \bar{\theta}_{x21} \dots \bar{\theta}_{x2m}\}_{(1)}$
 $\{\zeta_{(1)}\} = \{u_{11} w_{11} \varphi_{11} \dots u_{1m} w_{1m} \varphi_{1m} \dots u_{21} w_{21} \varphi_{21} \dots u_{2m} w_{2m} \varphi_{2m}\}_{(1)}$, $\{\varphi_{(1)}\} = \{\varphi_{11} \dots \varphi_{1m} \dots \varphi_{21} \dots \varphi_{2m}\}_{(1)}$

(b) 第1系($X_{(1)}$ 系) 基本構の節点たわみ性行列 $[f_{xx}]$ を用いて結合力 $\{\bar{X}_{(1)}\}$ と変位 $\{\bar{d}_{(1)}\}$ との関係を表わす。

$$\{\bar{d}_{(1)}\} = [f_{xx}] \{\bar{X}_{(1)}\} = [f_{xx}] \{\{\bar{Y}_{(1)}\} \{\bar{Z}_{(1)}\}\}^T, \quad [f_{xx}] = [B]^{-1} [f_{xx}] [A] \quad \dots (8)$$

ここに、 $\{\bar{Y}_{(1)}\} = \{\bar{N}_{11} \bar{V}_{11} \bar{M}_{y11} \dots \bar{N}_{1m} \bar{V}_{1m} \bar{M}_{y1m} \dots \bar{N}_{21} \bar{V}_{21} \bar{M}_{y21} \dots \bar{N}_{2m} \bar{V}_{2m} \bar{M}_{y2m}\}_{(1)}$, $\{\bar{Z}_{(1)}\} = \{\bar{M}_{x11} \dots \bar{M}_{x1m} \dots \bar{M}_{x21} \dots \bar{M}_{x2m}\}_{(1)}$

$[A]$ は横桁の節点における力と板の節線における力を関係づける行列、 $[f_{xx}]$ は基本構のたわみ性行列に力の作用する点と変位を求める点の三角関数を掛けて求められる行列である。

(c) 第2系($X_{(2)}$ 系) 横桁の剛性方程式を求める。 $\{\bar{X}_{(2)}\} = \{\{\bar{Y}_{(2)}\} \{\bar{Z}_{(2)}\}\}^T = [K] \{\bar{d}_{(2)}\} = [K] \{\{\bar{\zeta}_{(2)}\} \{\bar{\varphi}_{(2)}\}\}^T \quad \dots (9)$

(d) 結合力 $\{\bar{X}_{(1)}\}$ を求めるために次式を用いる。 $\{\bar{d}_{(1)}\} + \{\bar{d}_{(2)}\} = \{\bar{d}_{(1)}\}$, $\{\bar{X}_{(1)}\} + \{\bar{X}_{(2)}\} = \{0\} \quad \dots (10), (11)$

$$\text{式(8)~(11)を用いて, } \{\bar{X}_{(1)}\} = -([I] + [K])^{-1} [K] \{\bar{d}_{(1)}\} \quad [I]: \text{単位行列} \quad \dots (12)$$

$$\text{式(12)の結合力を板の節線における力に変換すると, } \{X_{(1)}\} = \{\{\bar{Y}_{(1)}\} \{\bar{Z}_{(1)}\}\}^T = [A] \{\bar{X}_{(1)}\} \quad \dots (13)$$

なお本解析法は曲線主桁だけからなる構造を基本構にとれば、非合成曲線桁橋などの骨組構造も解析でき、さらに中間支点反力・中間支点変位と上記 $\{d\}, \{X\}$ との関係を誘導すれば連続曲線桁橋解析にも応用できる。

3. 数値計算例 図4に示す曲線4主桁模型橋の静的載荷実験結果との比較を行えば、図5を得る。図6は、

G1桁の各ひずみ分布を示したもので、横桁の有無により k_n の正負が逆転することがわかる。

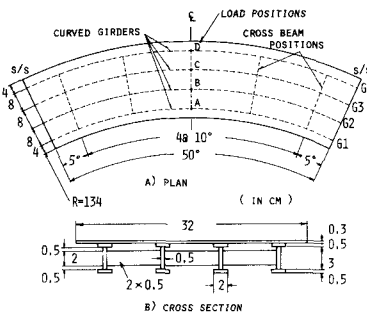


図4

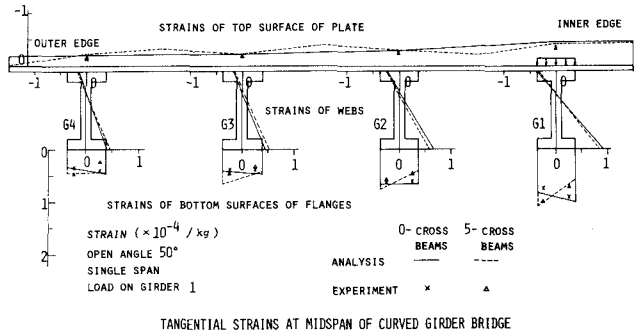


図5

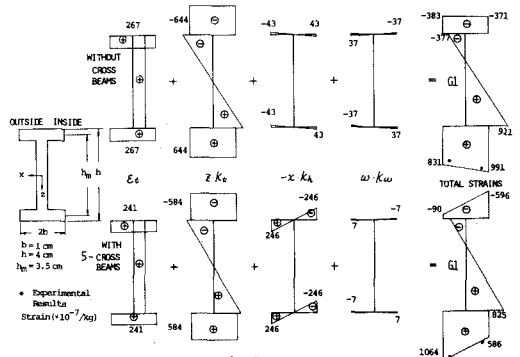


図6

4. 結語 本解析法は、各構成要素間(板と主桁、主桁と横桁)の偏心結合を考慮しているため、各部位間の力学的相互作用が厳密に把握できる特長を有し、また模型実験結果との比較から、横桁取付位置近傍のひずみ分布に致るまで十分な精度の解を提供し得ることが確かめられた。

参考文献

- 1) 吉村・平井; はりあるいはラーメンとトラスとを組合わせた構造物の動的および静的解析法について, 土木学会論文集, 第116号, S404
- 2) M.S.Cheung, Y.K.Cheung; Analysis of Curved Box Girder Bridges by Finite Strip Method, Publications, IABSE, 31-I, 1971, pp. 1~19.