

九州大学 工 正員 今井富士夫

九州大学 工 正員 太田 俊昭

石川島播磨 正員 寺本恵一郎

1. まえがき

立体骨組構造物の塑性解析法において、曲線部材を有する連続曲線桁や曲線格子桁などの、終局破壊耐力に関する研究はかなり見受けられるが、破壊に至る塑性変形や動的変動荷重下の崩壊パターンならびに動的塑性力学性状に関する体系的研究は、いまだ少ないようである。著者らは、先に曲げのみを受ける平面骨組構造物を対象として柔行列法による塑性解析法を提示したが、それは、リブスレイ流の変形法を拡張したものであり、解析演算においてヒンジ発生の如何を問わず解式行列の次数や要素配列の順序を固定化しうる特色を持っている。

本法は、これらの利点をそのまま生かす形に拡張した立体塑性解析法であり、特に曲線部材については、太田らの誘導した立体にわみ角式を利用して直線部材立体骨組構造物の場合と同一手法で曲線格子桁を平易に解析できるようにしたものである。この種の解析では、塑性ヒンジは曲げモーメント M^2 とねじりモーメント M^3 の組合せ力を受けることとなるが、本解析では、塑性条件として一応下界に属する $(M^2/M_0)^2 + (M^3/T_0)^2 = 1$ を用い、単純荷重増分法、ならびに修正荷重増分法によって計算を行うことにする。

2. 基礎理論

塑性ヒンジ発生予想点を節点と見なし、その予想ヒンジ間を一部材と考えれば、部材端に作用するモーメント増分 M と部材端の変形増分 $\bar{u}$ との関係は、次のようになる。

$$M = k \bar{u} \quad (k: \text{剛性マトリックス}) \quad \text{----- (1)}$$

また、変形の適合条件式は、たわみ角増分と材端変位増分を一括したものを $\bar{u}$ 、塑性変形増分を $\bar{u}^p$ 、そして、支点変位も仮定し、その変位増分を $\bar{\Delta}$ とすれば、 $\bar{u} = A_e \bar{u} + A_s \bar{\Delta} - \bar{u}^p$ ----- (2)

一方、力のつりあい式は、外力の増分を $\bar{P}$ とすれば、反傾関係より、 $\bar{P} = A_e^T M$ ----- (3)

降伏曲線上の点における外向き法線ベクトル A_p とすれば、定数 λ を用いて $\bar{u}^p$ は、塑性流れ法則により、 $\bar{u}^p = A_p \lambda$ 。ここに、 A_p は、 $A_p = \beta \partial f / \partial M$ 、であり、 β は部材端 i が弾性時には $\beta_i = 0$ 、ヒンジ発生時は $\beta_i = 1$ である。また、 f は降伏関数である。さて、塑性ヒンジが発生した時、 $\partial f = 0$ なる条件が満足されなければならない。 $0 = A_p^T M$ ----- (4)

これらを整理し、変形増分 $\bar{u}$ 、モーメント増分 M 、そして定数 λ についてまとめれば、柔行列 S を用いて、

$$\bar{u} = S (\bar{P} + \{ -S (A_e^T G G^T S) R_1 + S G G^T R_2 \} \bar{\Delta}) \quad \text{----- (5)}$$

$$\lambda = G^T G^T S \bar{P} + G^T (R_2 - G^T S R_1) \bar{\Delta} \quad \text{----- (6)}$$

$$M = k (A_e \bar{u} + A_s \bar{\Delta} - A_p \lambda) \quad \text{----- (7)}$$

ここで、 $R_1 = A_e^T k A_s$, $R_2 = A_p^T k A_s$, $S = (A_e^T k A_e)^{-1}$, $G = A_e^T k A_p$, $G_g = H - G^T S G$, $H = A_p^T k A_p + \alpha_h$

次に、動的解析では回転慣性を無視して変位応答のみについて行い、その時間積分については線形加速度法を用いる。その場合、慣性力、減衰力は、いずれも外力 $\bar{P}$ の項に含ませることができる。

さて、一般に荷重増分法では荷重増分を相当に小さくしても降伏時の応力経路は降伏曲線上から次第に外れてしまうことになり、その累積誤差の影響は動的問題では無視できない。よって、本法では、以下のような修正法を用いて演算した。

M^2, M^3 の作用する降伏関数は次のように一般表示することができる。

$$\Phi = X^2 + Y^2 - 1 = 0 \quad \text{----- (8)}$$

ただし、 $X = M^p/M_0$, $Y = M^p/T_0$, M_0, T_0 は全塑性曲げモーメント, 全塑性ねじりモーメントである。図-1において、先行荷重応力点 j が、その点の A_{pj} 値(A_{pj})を用いて計算された結果し点(X_i, Y_i)に変化したとする。し点より、降伏曲線に下した垂直線の交わる点を j 点(X_j, Y_j)とし、ベクトル ij を dS とすれば、

$$dS = (X_j - X_i) \hat{i}_x + (Y_j - Y_i) \hat{i}_y \quad \text{----- (9)}$$

ただし、 $\hat{i}_x, \hat{i}_y$; X, Y 軸に関する単位ベクトル。また、 j 点における降伏曲線の垂直ベクトルを n とすると次式が定義される。

$$n = \frac{\partial \Phi}{\partial X} \hat{i}_x + \frac{\partial \Phi}{\partial Y} \hat{i}_y = 2X_j \hat{i}_x + 2Y_j \hat{i}_y \quad \text{----- (10)}$$

$$\text{明らかに、} n \parallel dS \text{ であるから} \quad Y_j = \frac{Y_i}{X_i} X_j \quad \text{----- (11)}$$

$$\begin{aligned} \text{よって、式(8)より} \quad & \{1 + (\frac{Y_i}{X_i})^2\} X_j^2 = 1 \\ \therefore X_j = \text{sign}(X_i) / \sqrt{1 + (Y_i/X_i)^2} \\ Y_j = \text{sign}(Y_i) / \sqrt{1 + (X_i/Y_i)^2} \end{aligned} \quad \text{----- (12)}$$

よって、 j 点の応力(X_j, Y_j)が求められれば、それに対応して j 点の(A_{pj})が定められるが、応力経路が $i \sim j$ に移動する時、 A_{pi} は(A_{pj})から(A_{pj})に変化することになるゆえ、その間の A_{pi} は、近似的に次式で与えられる。 $A_p = A_p^* = \frac{1}{2} \{ (A_{pi}) + (A_{pj}) \}$ ----- (13)

3. 解析例

図-2で表わされる曲線格子桁を対象に、強制外力 $Q = f m \omega_0 \sin \omega t$ を与え、その動的挙動を追跡した。その諸元は、 $r_1 = 69.5 \text{ cm}$, $r_2 = 56.0 \text{ cm}$, $M_0 = 68.75 \text{ kg}\cdot\text{cm}$, $T_0 = 52.92 \text{ kg}\cdot\text{cm}$, 断面積 $A = 0.5 \times 0.5 \text{ cm}^2$ である。

図-3は、応答倍率 $f = 2.0$, 外力円振動数 $\omega = 0.7 \omega_0$ (ω_0 は一次の固有円振動数である) を与えた時の応答曲線である。case aは、修正していない場合、case bは、修正した場合で、図中の数字は塑性ヒンジ発生点を表わしたものである。図-4は、その時の内力比の状態を追跡したものであるが、本修正法は、降伏条件をよく満足していることが認められた。

<参考文献>

- (1) 太田俊昭 他; 平面骨組構造物の静的動的塑性曲げに対する数値解析法, 土木学会論文報告集, 第239号, 1975年7月
- (2) 太田俊昭; 任意部材を持つ立体ラーメンの解法に関する研究, 九州大学提出学位請求論文, 1968年12月

