

早稲田大学大学院 学生員 〇 逸見 雄人
運輸省 正員 岩崎 三日子
早稲田大学理工学部 正員 堀井 健一郎

1. まえがき. ここで取扱った対象は境界で熱交換を行う2次元非定常熱伝導問題である。その定式化を試みトンネルの坑内から地山にかけての温度変化を追跡する問題に適用してみた結果について報告する。

2. 理論的概要. 材料の熱伝導特性が直交異方性で、平板の上下両面で流体との間に熱伝達による熱交換がないとき、熱伝導の基本式は次のようになる。

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(K_x \frac{\partial \theta}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(K_y \frac{\partial \theta}{\partial y} \right) + \dot{q} = \rho C \frac{\partial \theta}{\partial t} \quad \dots (1)$$

ρ : 密度, C : 比熱
 $\dot{q}$: 単位体積、単位時間当りの発熱量

上式に温度の第1変分 $\delta\theta$ をかけて面積と時刻で積分し、途中部分積分を行って整理すると(2)式が得られる。

$$\int_0^T \int_A \left(\rho C \frac{\partial \theta}{\partial t} - \dot{q} \right) \delta\theta dA dt - \int_0^T \int_S \left(K_x \frac{\partial \theta}{\partial x} n_x + K_y \frac{\partial \theta}{\partial y} n_y \right) \delta\theta dS dt + \int_0^T \int_A \left(K_x \frac{\partial \theta}{\partial x} \frac{\partial \delta\theta}{\partial x} + K_y \frac{\partial \theta}{\partial y} \frac{\partial \delta\theta}{\partial y} \right) dA dt = 0 \quad \dots (2)$$

ここで A : 解の対象領域, τ : 任意時刻, (x, y) : 領域 A の境界上の法線ベクトルの方向余弦

(2)式第2項目の被積分関数は要素境界からの流出量を表わし、一般要素では0であり対象領域端の要素にのみ存在する。これを有限要素法を用いて解析する。要素は三角形要素を選び形状関数として要素内の場所的、時間的変化が線形であるとすれば、任意点の温度 θ は次式で表わされる。 $\theta = (a_0 + a_1 x + a_2 y) + (a_3 + a_4 x + a_5 y)t$

これに境界条件を与え、 $a_0 \sim a_5$ を消去すると任意点の温度は節点座標と節点温度で表わすことができる。

$$\text{すなわち } \theta = \sum_{i=1}^3 \phi_i \theta_i(0) + \sum_{i=1}^3 \psi_i \theta_i(\tau) \quad \dots (3)$$

$$\text{また } \frac{\partial \theta}{\partial x} = \sum_{i=1}^3 \left\{ \theta_i(0) \frac{\partial \phi_i}{\partial x} + \theta_i(\tau) \frac{\partial \psi_i}{\partial x} \right\}, \quad \frac{\partial \theta}{\partial y} = \sum_{i=1}^3 \left\{ \theta_i(0) \frac{\partial \phi_i}{\partial y} + \theta_i(\tau) \frac{\partial \psi_i}{\partial y} \right\} \quad \dots (4)$$

$$\delta\theta = \sum_{i=1}^3 \psi_i \delta\theta_i(\tau), \quad \frac{\partial \delta\theta}{\partial x} = \sum_{i=1}^3 \left\{ \frac{\partial \psi_i}{\partial x} \delta\theta_i(\tau) \right\}, \quad \frac{\partial \delta\theta}{\partial y} = \sum_{i=1}^3 \left\{ \frac{\partial \psi_i}{\partial y} \delta\theta_i(\tau) \right\}$$

となり、これらの関係を(2)式に代入し、それが任意の $\delta\theta_i(\tau)$ に対し成立つことから、一般要素について次式を得る。

$$\sum_{j=1}^3 K_{ij} \theta_j(\tau) = Q_i - \sum_{j=1}^3 \bar{K}_{ij} \theta_j(0) \quad \dots (5)$$

$$\text{ただし } K_{ij} = \int_0^T \int_A \left\{ K_x \frac{\partial \psi_i}{\partial x} \frac{\partial \psi_j}{\partial x} + K_y \frac{\partial \psi_i}{\partial y} \frac{\partial \psi_j}{\partial y} + \rho C \frac{\partial \psi_i}{\partial t} \psi_j \right\} dA dt, \quad Q_i = \int_0^T \int_A \dot{q} \psi_i dA dt$$

$$\bar{K}_{ij} = \int_0^T \int_A \left\{ K_x \frac{\partial \phi_i}{\partial x} \frac{\partial \psi_j}{\partial x} + K_y \frac{\partial \phi_i}{\partial y} \frac{\partial \psi_j}{\partial y} + \rho C \frac{\partial \phi_i}{\partial t} \psi_j \right\} dA dt$$

一方、流体と接する端要素においては、熱交換に伴う熱出入項が加わる。外気温を θ_0 、熱伝導率を α 、板厚 h とすると熱流出入量は $\dot{q}_m = \alpha h (\theta_0 - \theta)$ となり、これを積分すれば(2)式第2項となる。前述のように変分を消去し整理すると $\sum_{j=1}^3 \int_0^T \int_S \alpha h \psi_i \psi_j ds dt \theta_j(\tau) = \sum_{j=1}^3 \int_0^T \int_S \alpha h \psi_i \psi_j ds dt \theta_j(0) - \sum_{j=1}^3 \int_0^T \int_S \alpha h \psi_i \psi_j ds dt \theta_j(0) \quad \dots (6)$

が(5)式に加わる。すべての要素に(5)、(6)を重ね合わせ、初期条件を与えると温度分布が計算できる。

3. 数値計算例 トンネル周辺を図-1のように分割し、トンネル内の気温を与えた時の温度分布を計算する。

次にトンネル内周上に厚35mmの断熱材を取付けた場合の

計算をして結果と比較する。ただし熱伝導特性に関する

諸数値は下記のものを使用した。④=6.2+14.7sinwt [deg]

	密度 [kg/m ³]	比熱 [Kcal/kg deg]	熱伝導率 [Kcal/m hr deg]
コンクリート	2000	0.2	2.0
地山	2200	0.27	1.3
断熱材	33	0.3	0.015

図-1

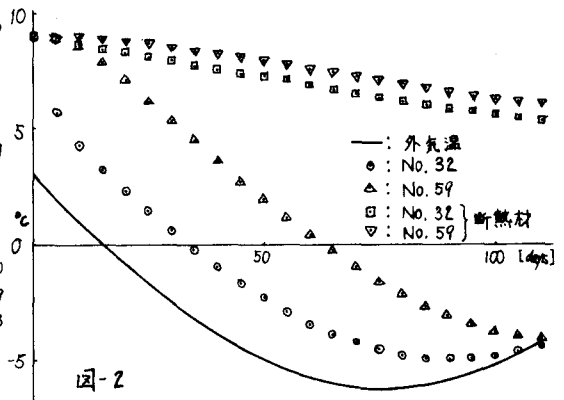
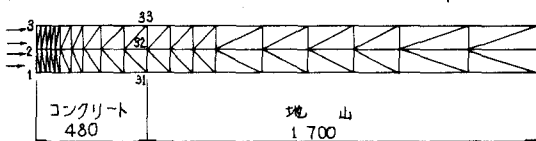


図-2