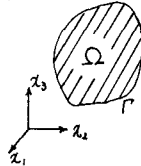


1. まえがき 非定常熱伝導解析はマスコンフリート、各種の配管系あるいは周期的に内部温度の変化する容器構造物の熱応力を計算する上で重要である。解析法としては、通常、有限要素法を用いることが多く、(i)有限要素法による熱応力解析の前段階として行なわれる場合が多い。(ii)不均質、異方性体の取り扱いが容易。(iii)注意の境界条件に適応しやすい。(iv)標準的なプログラムが使用できる。等がその理由として上げられるであろう。そこで、ここでは非定常熱伝導の偏微分方程式から空間領域を有限要素法により離散化する過程、およびその後の時間積分の安定性について考察を加え、より安定性が良く、精度の高い計算方法について検討する。

2. 非定常熱伝導方程式の有限要素法による空間領域離散化³⁾

非定常熱伝導の偏微分方程式は次式である

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \alpha_0 \nabla^2 u + f & (\text{in } \Omega) \cdots \cdots (1) \\ u = g & (\text{on } \Gamma) \cdots \cdots (2) \\ u|_{t=0} = u_0 & (\text{in } \Omega) \cdots \cdots (3) \end{cases}$$



そこで、 $(u, \varphi) = \int_{\Omega} u \varphi dx_1 dx_2$ とすれば、(1)式は

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}, \varphi \right) = -(\alpha_0 \nabla u, \nabla \varphi) + (f, \varphi) \cdots \cdots (4)$$

となる。次に $\hat{w}_j$ を要素分割した結点 $j=1, \dots, N$ とし、他の点 $i \neq j$ の区分1次関数とすれば、領域 Ω において

3. 時間積分の漸化式

3-1 直接積分の場合

(4)式の初期値問題の一般解は次式である。

$$u(t) = e^{At} u(0) + e^{At} \int_0^t e^{-As} f(s) ds \cdots \cdots (11)$$

そこで、 $f(t)$ が Δt 間一定あるいは直線変化するものとすれば、次の漸化式が導かれる。

$$u_{t+\Delta t} = e^{A\Delta t} u_t + A^{-1} (e^{A\Delta t} - I) f_t \quad (f: \text{一定}) \cdots \cdots (12)$$

$$u_{t+\Delta t} = e^{A\Delta t} u_t + A^{-1} \left\{ \frac{1}{\Delta t} A^{-1} (e^{A\Delta t} - I) - I \right\} f_{t+\Delta t} + \left\{ e^{A\Delta t} - \frac{1}{\Delta t} A^{-1} (e^{A\Delta t} - I) \right\} f_t \quad (f: \text{直線変化}) \cdots \cdots (13)$$

4. 固有値分布

漸化式(12)(13)から明らかなように、 $e^{A\Delta t}$ の近似方法が逐次積分の安定性を決めることになり、最適な近似を行なうためにはマトリックス A の固有値分布を知らなければならぬ。

マトリックス M および K の正値性から、 A のすべての固有値が負の実数になることは言えるが、他の方法で同じ事を証明するのも容易である。なお、藤井³⁾は次式で絶対値最大の固有値が推定できると述べている。

$\hat{u}_N = \sum_{j=1}^N u_j \hat{w}_j$, $\hat{g}_N = \sum_{j=1}^N g_j \hat{w}_j$ (N は結点数) $\cdots (5)$
 が定まる。ただし、 u_j は求める近似解の点 j における値であり、 g_j は境界条件を満たす任意の関数 g の点 j における値である。(5)式を(4)式へ代入すれば

$$M \dot{\hat{u}} + K \hat{u} = M \hat{f} \cdots \cdots (6)$$

$$\text{但し } M = (M_{jk}) = (\hat{w}_k, \hat{w}_j) \cdots \cdots (7)$$

$$K = (K_{jk}) = (\nabla \hat{w}_k, \nabla \hat{w}_j) \cdots \cdots (8)$$

$$\hat{f}^T = (f_1, f_2, \dots, f_N), \quad \hat{u}^T = (u_1, u_2, \dots, u_N) \cdots (9)$$

(6)式を正規型に変形すれば次式になる。

$$\dot{\hat{u}} = A \hat{u} + \hat{f} \quad (\text{但し } A = -M^{-1}K) \cdots \cdots (10)$$

ただし、 I は単位マトリックスとし、 $u_{t+\Delta t}$, u_t , $f_{t+\Delta t}$, f_t は x_1, x_2 において $t, t+\Delta t$ における u, f の値である。

3-2 モード解析の場合

一自由度系の場合、解析的に厳密な漸化式が導かれる。方程式を $\ddot{z} + \lambda \dot{z} = P(t)$ とし、 $z_{t+\Delta t}$, $\dot{z}_t$, $P_{t+\Delta t}$, P_t を x_1, x_2 において $t, t+\Delta t$ における z, P の値とすれば

$$z_{t+\Delta t} = e^{-\lambda \Delta t} z_t + \frac{1}{\lambda} (1 - e^{-\lambda \Delta t}) P_t \quad (P: \Delta t \text{ 間一定}) \cdots \cdots (14)$$

$$z_{t+\Delta t} = e^{-\lambda \Delta t} z_t + \left\{ \frac{1}{\lambda} - \frac{1 - e^{-\lambda \Delta t}}{\lambda^2 \Delta t} \right\} P_{t+\Delta t} + \left\{ -\frac{e^{-\lambda \Delta t}}{\lambda} + \frac{1 - e^{-\lambda \Delta t}}{\lambda^2 \Delta t} \right\} P_t \quad (P: \Delta t \text{ 間直線変化}) \cdots \cdots (15)$$

$$\lambda_{\max} = \frac{\alpha_0 A_n}{K_{\min}} (m+1) \quad (M \text{ が Lumped の場合}) \cdots \cdots (16)$$

$$\lambda_{\max} = \frac{\alpha_0 A_n}{K_{\min}} (m+1) \chi(m+2) \quad (M \text{ が Consistent の場合}) \cdots \cdots (17)$$

ただし、 m : 次元数

α_0 : 材料定数 [熱伝導率/(比熱×比重)]

$K_{\min}$: 要素分割した全三角形の辺長の長さの最小値

A_n : $\begin{cases} 2: \text{すべての三角形が鋭角三角形の場合} \\ (m+1): \text{鋭角三角形のみでない場合} \end{cases}$

5 安定性

マトリックス法の固有値を λ_{eig} とした時、スキームが安定であるためには、 $e^{\lambda_{\text{eig}} \Delta t}$ に対して近似した $e^{\lambda_{\text{eig}} \Delta t}$ の絶対値が常に1以下であればよい。Wilson-Cloughによる方法は

$$e^{\lambda_{\text{eig}} \Delta t} = \frac{1 + \frac{1}{2} \lambda_{\text{eig}} \Delta t}{1 - \frac{1}{2} \lambda_{\text{eig}} \Delta t} \quad (18)$$

であり、これはCrank-Nicholsonの方法でも同様である。この近似法によれば

$$\lim_{\Delta t \rightarrow \infty} e^{\lambda_{\text{eig}} \Delta t} = -1 \quad (19)$$

であり、注意の Δt に対して、 $|e^{\lambda_{\text{eig}} \Delta t}| < 1$ になるのを要する。

6 数値計算例

$$x=0 \quad \theta = 10 \sin(2\pi t/24) \text{ } ^\circ\text{C} \quad x=0.5 \text{ m} \quad \theta = 0 \text{ } ^\circ\text{C}$$

まず、直接積分法の計算例として、図

1(a)に示すコンクリート平板を扱った。左の面は $10 \sin(2\pi t/24) \text{ } ^\circ\text{C}$

右の面は $0 \text{ } ^\circ\text{C}$ の場合の内部の温度変化を計算した。材料定数は $\alpha = 0.003 \text{ (m}^2/\text{hour)}$

とした。要素分割図 図-1. 平板の計算モデルとその要素分割

上、③点の温度変化を示したのが図-2、図-3である。初期温度が板全体 $0 \text{ } ^\circ\text{C}$ のような場合は、大きな固有値成分が影響しないので、厳密解、Wilson-Cloughの方法、本解析法($e^{\lambda_{\text{eig}} \Delta t}$ は多項式近似した)はよく一致するが、図-1(c)の初期温度では、Wilson-Cloughの方法に不自然な解の得られることがわかる。数値安定であり、 $\lambda_{\text{max}} \Delta t$ が小さくても構わない。本解析法では $e^{\lambda_{\text{eig}} \Delta t}$ の近似を適切に選択できるので、このような現象を避けることができる。図-4は一自由度系の応答計算結果である。厳密解とよく一致している。

7 むすび

以上、非定常熱伝導方程式の有限要素法による空間領域離散化、時間積分の漸化式の誘導とその安定性について考察した。有限要素法による非定常熱伝導計算では、しばしば不合理な現象が起きるが、それらの原因と回避する方法の糸口をつかめたと思う。多くの有益な助言を頂いた電力中研、中川友康氏、池田勲氏に深く感謝致します。

参考文献

- 1) 塩尻弘雄、中村孝治：構造解析における動的応答解析の一方法について、土木学会論文報告集、NO. 246, 1976.2
- 2) Zienkiewicz, O.C., Cheung, Y.K.: マトリックス有限要素法、培風館、1970
- 3) Fujii, H. Some Remarks on Finite Element Analysis of Time-Dependent Field Problems, Proc. 1973. Tokyo Seminar on Finite Element Analysis, Univ. of Tokyo Press.

件安定となる。一般に有理式近似ではこのようにすることが可能であるが、逆マトリックス計算を行わなければならない。もし、温度変化に伴う物性変化が大きい場合は多項式近似が有利である。その場合、 λ_{eig} がある値以上になれば必ず不安定になるのを $\lambda_{\text{max}} \Delta t$ の検討が必要であり、藤井の式が有効に用いられる。また指数関数の加法定理は $\lambda_{\text{eig}} \Delta t$ の安定領域を広げるのに有効である。本解析法では注意の近似法を採用できる。

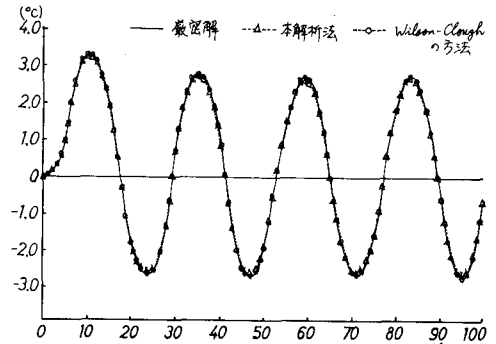


図-2. 初期温度が板全体 $0 \text{ } ^\circ\text{C}$ の場合 ($\Delta t = 1$ 時間, $\lambda_{\text{max}} \Delta t = 99$)

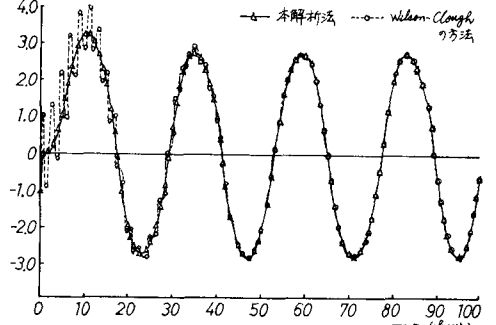


図-3. 初期温度が図-1(c)の場合 ($\Delta t = 1$ 時間, $\lambda_{\text{max}} \Delta t = 99$)

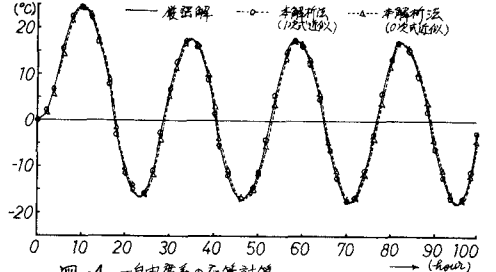


図-4. 一自由度系の応答計算 ($\ddot{y} + 2\dot{y} = f(t)$; $\lambda = 0.1 \text{ (1/second)}$, $f(t) = 5 \sin(2\pi t/24) \text{ (} ^\circ\text{C/second)}$, $\Delta t = 1$ 時間)