I-54　弾塑性問題の数値解法における一考察

大阪大学大学院　学生員　芦田　義則
大阪大学工学部　正　員　前田　幸雄
大阪大学工学部　正　員　林　　正

1．まえがき

材料非線形性を示す構造物の荷重－変位曲線は，その曲率は負になり，極大点を有するようないわゆる屈服型の形状を示す．変形法を用いてこのような構造物を解析する場合，構造物全体の接線剛性行列は極大点近傍で擬特異になったり，不安定領域では negative definite になったりする。弾塑性問題の解法として従来からよく用いられている荷重増分法を適用した場合には，荷重－変位曲線における極大点，すなわち最高荷重点に近づいたときには荷重増分量を小さくする必要があり，最高荷重点を越えれば負の増分量を与えなければならない。プログラミングにおいて，荷重増分量を上述のように自動的に制御するためにはプログラムが煩雑になり，さらに荷重－変位曲線の性状によっては計算がうまく進行しないことがある．しかし，変位で計算を制御する変位増分法を用いれば，この種の問題を極めて容易に解析することができる．そこで，本報告ではマトリックス構造解析における変位増分法の手法[1]を説明し，この手法を骨組構造物の弾塑性有限変位問題に適用した結果を述べる．

2．係数行列の1列と定数項を入れ換えた方程式の解

n次正方行列$\mathbb{A}$を係数行列とする連立1次方程式

$$\mathbb{A}x=\mathbb{b} \quad (1), \qquad \mathbb{A}=(a_1, a_2, \cdots, a_j, \cdots, a_n) \quad (2)$$

において，係数行列の第j列a_jと定数項$\mathbb{b}$を入れ換えた方程式を考える．すなわち，

$$\tilde{\mathbb{A}}\tilde{x}=a_j \quad (3), \qquad \tilde{\mathbb{A}}=(a_1, a_2, \cdots, \mathbb{b}, \cdots, a_n) \quad (4)$$

この方程式の(3)の解は，式(1)の解を用いて次のように表わすことができる[1]．

$$\tilde{x}_k=\begin{cases} -x_k/x_j & (k \neq j) \\ 1/x_j & (k=j) \end{cases} \qquad (k=1,2,\cdots,n) \quad (5)$$

係数行列$\mathbb{A}$が対称帯行列の場合，一般に$\tilde{\mathbb{A}}$は非対称で，かつ帯行列とはならないので，式(3)を解く代りに上述の計算手法を用いれば，計算時間と記憶容量を大巾に節約することができる。

3．変位増分法

修正荷重増分法においては，$\mathbb{K}$を接線剛性行列，$\mathbb{g}$を未知変位，$\mathbb{P}$を外力，$\mathbb{R}$を不平衡力として

$$\mathbb{K}\mathbb{g}=\lambda\mathbb{P}-\mathbb{R} \quad (6)$$

を解くことにより変位$\mathbb{g}$を求める．ここに，λは与えられた荷重増分量である．一方，変位増分法では，λを未知量として扱い，変位$\mathbb{g}$の特定の成分を既知量として，式(6)を解く手法である．いま，変位$\mathbb{g}$を2つのベクトルに分けて式(7)のようにおき，これを用いて式(6)を次の2つの方程式に分解する．

$$\mathbb{g}=\mathbb{t}+\mathbb{u} \quad (7), \qquad \mathbb{K}\mathbb{t}=\lambda\mathbb{P} \quad (8), \qquad \mathbb{K}\mathbb{u}=-\mathbb{R} \quad (9)$$

ここで，$\mathbb{g}$の第j成分g_jを既知とし，これをδとおけば $g_j=t_j+u_j=\delta$ となる．u_jは式(9)より求められるので，$t_j=\delta-u_j$ を式(8)に代入して$\mathbb{K}$の第j列$\mathbb{k}_j$と$\mathbb{P}$を入れ換えると

$$\tilde{\mathbb{K}}\tilde{\mathbb{t}}=(u_j-\delta)\mathbb{k}_j \quad (10), \qquad \tilde{\mathbb{t}}=(t_1, t_2, \cdots, -\lambda, \cdots, t_n) \quad (11)$$

となる．式(10)の解$\tilde{\mathbb{t}}$は式(5)の関係より，次式(12)の解$\mathbb{v}$を用いて表わすことができる．

$$\mathbb{K}\mathbb{v}=\mathbb{P} \quad (12)$$

したがって，式(11)よりλが求められるので，式(7)より変位$\mathbb{g}$は次式で与えられる．

$$\mathbb{g}=\mathbb{u}+\lambda\mathbb{v} \quad (13), \qquad \lambda=(\delta-u_j)/v_j \quad (14)$$

結局，式(13)で与えられる変位は，係数行列が同じ式(9)と(12)の解を用いて表わすことができるので，原方程式(6)における剛性行列$\mathbb{K}$の対称性と帯行列の性質を失うことなく計算できる利点がある．

次に，Newton－Raphson法を併用した混合法について説明する。まず，与えられた変位増分δに対する第1近似解として，式(13)，(14)の値を求める．2次以上の近似解を求めるためには，$\delta=0$として解が収束するまで同じ計算手順を繰り返せばよい．

4．弾塑性有限変位解析

平面骨組構造物の弾塑性解析において，次のような基礎式を用いた[2]。

$$\text{歪増分}:\ \Delta\varepsilon=\frac{d\Delta u}{dx}+\frac{dv}{dx}\frac{d\Delta v}{dx}+\frac{1}{2}\left(\frac{d\Delta v}{dx}\right)^2-\eta\frac{d^2\Delta v}{dx^2} \qquad (15)$$

$$\text{歪エネルギー増分}:\ \Delta U=\int_{V_e}\left(\sigma\Delta\varepsilon+\frac{E}{2}\Delta\varepsilon^2\right)dV+\int_{V_p}(\sigma\Delta\varepsilon)dV \qquad (16)$$

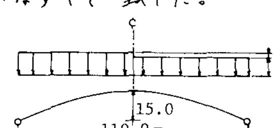
ここに，Δは増分を表わし，V_eは弾性域または除荷が起きる塑性域，V_pは負荷の塑性域を表わす。

マトリックス解析法を用いた場合，塑性域の拡がりを考慮するために一部材を細要素に分割し，式(16)を用いて各要素ごとの剛性行列を求めた．

数値解析においては，弾性要素のなかで最も大きな応力度が生じている要素が塑性化するように増分量を決定した。このようにすると，荷重状態によっては一要素づつ塑性化が進行し，構造物が崩壊するまで極めて多くの増分段階を必要とするので，塑性化の判定には構造物全体の剛性には影響しないような方法で許容範囲を与えた．

最高荷重の判定には，エネルギー原理により系の全ポテンシャルをΠとしたとき，$\delta^2\Pi=0$ になる荷重を求めればよい。これは接線剛性行列の行列式が零になるときであるが，数値的には起り得ない。そこで，接線剛性行列がpositive からnegative definite になるときを最高荷重とした。この判定には，数学的に厳密な主小行列式の符号を調べることによって行った[1]。通常，剛性行列の行列式が負になれば構造物が不安定であると判断されているが，これは十分条件であってこの判定法は誤っている。実際，対称アーチに等分布荷重が全載する場合，剛性行列はnegative であるのにその行列式は正であることが起った。変位増分法を用いた場合，最高荷重点を過ぎれば荷重は自動的に減少するので，上述の判定は必要としない。種々の構造物について数値計算を行った結果では，剛性行列がnegative definite になるときと荷重が減少するときはすべて一致した。

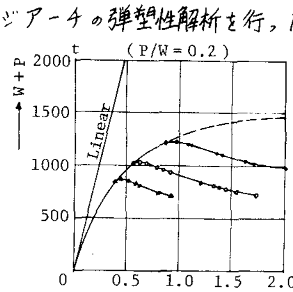
本研究で用いた解析手法とプログラムの精度を実験により確認した。その結果は，応力度分布，塑性域の拡がり，最高荷重の値とも良く一致した．最高荷重について，その誤差は1～4％であった[3]。



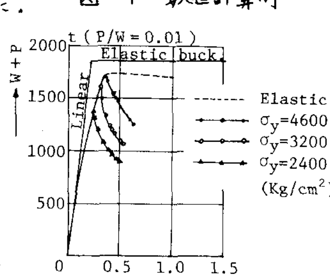
図－1　数値計算例

5．数値計算例

数値計算の一例として，図－1に示す2ヒンジアーチの弾塑性解析を行った．断面諸量については省略する[4]。計算では，アーチリブを箱型断面とし，これを14部材に分割した。また，一部材を部材軸方向と断面内において4～10分割した。荷重は全載荷重Wの他に，半載荷重Pを載荷した。この時の荷重－変位曲線を，図－2，3に示す。



図－2



図－3

最高荷重が未知量である弾塑性問題の解法には，変位増分法が適しているといえる。

1) 林　正：構造物の非線形解析における多元連立方程式の数値解法，京大数理解析研究所講究録，Vol, 269, 1976.
2) 藤田・大坪・湯原：構造物の塑性設計(その10)，日本造船学会論文集，第126号，昭和44年11月．
3) 前田・林・松井：大三島橋の実験的研究，本講演概要集．
4) 前田・林・中村：増分法による平面骨組構造物の大変形解析の加速計算法，土木学会論文報告集，No. 223，1974.