I-53　薄板の有限変位解析に関する一考察

日本鋼管　正員　中川　茂
東京大学　学生員　阿井正博
東京大学　正員　西野文雄

1. まえがき　薄板の有限変位理論として，最近では有限要素法を用いた方法が一般的に行なわれている。この有限要素法を用いた解法には，非線形なひずみと変位の関係を用いて直接非線形な剛性マトリックスを求めこれを基本式として問題を解く方法[1]，あるいは板を微小要素に分割し，要素おのおのについては微小変位の剛性マトリックスで考え，要素間の境界条件で非線形性を考慮する方法[2]，これら2つの方法に分類できる。

本報告においては，薄板理論の仮定の範囲内で，微小ひずみの仮定をおいた場合の薄板の有限変位問題の支配方程式を，幾何学的な非線形性を厳密に考慮して求め，これをもとに，薄板の有限変位理論について考察を加える。さらに，有限要素法を用いる2つの方法の理論的な位置づけをし，検討を加えた。

2. 薄板の支配方程式　変形前の基準状態において，右手系の直交直線座標を構成する埋込座標 (x, y, z) を選び，ラグランジェの方法を用いて物体内の点を表わすと，ひずみテンソルと変位の関係は次のように表わされる。

$$e_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i}\frac{\partial u_k}{\partial x_j}\right) \cdots\cdots\cdots (1)$$

本報告では次の仮定をおく。1) 板は基準状態で平らであり，その厚さは十分に薄い。2) Kirchhoff-Love の仮定 $e_{zz}=0$, $e_{yz}=0$, $e_{zx}=0$。3) 微小ひずみの仮定 $|e_{xx}| \ll 1$, $|e_{yy}| \ll 1$, $|e_{xy}| \ll 1$。

式(1)を 2) の仮定に代入すると変位場が求まる。変位場を式(1)に代入し 3) の仮定をおくと，ひずみテンソルの零でない成分は次のように表わされる。

$$e_{xx} = e_{xx0} + k_{xx}\cdot z, \quad e_{yy} = e_{yy0} + k_{yy}\cdot z, \quad e_{xy} = e_{xy0} + k_{xy}\cdot z \cdots\cdots\cdots (2.a \sim c)$$

ここに，e_{xx0}, e_{yy0}, e_{xy0} は中央面でのひずみ，k_{xx}, k_{yy}, k_{xy} は中央面での曲率である。例えば，e_{xx0}, k_{xx} は次のように表わされる。

$$\left.\begin{aligned} e_{xx0} &= \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{1}{2}\left\{\left(\frac{\partial u_0}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v_0}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w_0}{\partial x}\right)^2\right\} \\ k_{xx} &= -\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2}\left\{\frac{\partial v_0}{\partial x}\cdot\frac{\partial w_0}{\partial y} - \frac{\partial w_0}{\partial x}\left(1+\frac{\partial v_0}{\partial y}\right)\right\} - \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2}\left\{\frac{\partial u_0}{\partial y}\cdot\frac{\partial w_0}{\partial x} - \frac{\partial w_0}{\partial y}\left(1+\frac{\partial u_0}{\partial x}\right)\right\} \\ &\quad - \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}\left\{\left(1+\frac{\partial v_0}{\partial y}\right)\left(1+\frac{\partial u_0}{\partial x}\right) - \frac{\partial v_0}{\partial x}\cdot\frac{\partial u_0}{\partial y}\right\} \end{aligned}\right\} \cdots\cdots\cdots (3.a.b)$$

式(2)の中央面でのひずみと中央面での曲率を用いて断面力が表わされる。

薄板の変位後の微小六面体に作用する力のつり合い式ならびに境界条件を，幾何学的考察によって求めた。今基準状態での直交直線座標軸 (x, y, z) に平行で，座標軸の正の方向を向く単位ベクトル，$\hat{e}_x$, $\hat{e}_y$, $\hat{e}_z$ 方向の力のつり合い式を示すと次のようである。

$$\frac{\partial}{\partial x}\left([\mathrm{T}]^T\begin{Bmatrix} N_x \\ N_{xy} \\ Q_x \end{Bmatrix}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left([\mathrm{T}]^T\begin{Bmatrix} N_{xy} \\ N_y \\ Q_y \end{Bmatrix}\right) + \begin{Bmatrix} \bar{g}_x \\ \bar{g}_y \\ \bar{g}_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \end{Bmatrix} \cdots\cdots\cdots (4)$$

ここに，行列 $[\mathrm{T}]$ は，変位後の基底ベクトル g_i と，変位前の単位ベクトル $\hat{e}_i$ との間を関係づけるものであり中央面の変位を用いて表わされる。このように $[\mathrm{T}]$ が変位の関数であり，また断面力が変位に関する非線形式であるから，このつり合い式はきわめて複雑な非線形式である。

3．微小要素分割による解法　板の微小要素中の任意の点の変位 $\mathbb{u}$ は，要素の剛体変位 $\mathbb{R}$ と要素のひずみに直接寄与する変位 $\mathbb{u}^*$ を用いて表わすことができる。今　十分小さい要素を考えれば，$\mathbb{u}^*$ は十分小さい量であり，したがってこの $\mathbb{u}^*$ を用いて微小要素内の支配方程式を表わすと微小変位の支配方程式と一致する。微小要素内では，変位に対して制約をつけないつり合い式 (4) が次のようになる。

$$[\mathbb{T}^A]^T \left[\frac{\partial}{\partial x}\begin{Bmatrix} N_x \\ N_{xy} \\ Q_x \end{Bmatrix} + \frac{\partial}{\partial y}\begin{Bmatrix} N_{xy} \\ N_y \\ Q_y \end{Bmatrix} + [\mathbb{T}^A]\begin{Bmatrix} \bar{g}_x \\ \bar{g}_y \\ \bar{g}_z \end{Bmatrix} \right] = \begin{Bmatrix} \\ 0 \\ \\ \end{Bmatrix} \cdots\cdots\cdots (5)$$

ここに $[\mathbb{T}^A]$ は，要素の剛体回転を示す直交行列であり定数のマトリックスである。断面力は，＊つきの変位で表わしたときに微小変位の仮定を満足していることから，式(5)のつり合い式は線形な微分方程式である。境界条件を考える時には，この要素の剛体回転を表わす直交行列が各要素ごとに異なるため，剛体変位後の単位ベクトル方向で表わした力の方向が各要素ごとに異なり，要素の境界でつり合いを考えるとここに非線形性が入ってくる。

4．考察および結語

(1) Von-Kármán 理論との比較

有限変位としては，最低次の非線形性を扱った理論である Von-Kármán の理論における仮定を式(4)に適用したところ，Von-Kármán 式とは一致せず，例えば，$\mathbb{e}_x$ 方向の力のつり合い式で比較すると，次のような，Von-Kármán 式では見られない項が見られた。

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} + \bar{g}_x - \underline{\frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{\partial w_0}{\partial x}\left(\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y}\right)\right\}} - \underline{\frac{\partial}{\partial y}\left\{\frac{\partial w_0}{\partial x}\left(\frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y}\right)\right\}} = 0 \cdots\cdots\cdots (6)$$

ここで，下線の項が Von-Kármán の式では落ちている。

(2) 有限要素法を用いた方法の比較

いままでの，有限要素法を用いて行なわれた研究を，要素における剛性方程式で比較すると次のように表わされる。

$$\left.\begin{aligned} &1)\ \{\mathbb{F}\}_e = [K_e(\mathbb{u}_{(e)})]\{\mathbb{u}\}_e \\ &2)\ \{\mathbb{F}\}_e = [\mathbb{T}^A_{ra}(\mathbb{u}_A)]^T[K_e^*][\mathbb{T}^A_{ra}(\mathbb{u}_A)]\{\mathbb{u} - \bar{\mathbb{u}}\}_e \end{aligned}\right\} \cdots\cdots\cdots (7.a.b)$$

ここで，1)の剛性マトリックスは非線形であり，2)の剛性マトリックスは，微小変位の剛性マトリックスであるが，前後から変位変換マトリックスがかかることによって非線形性が生じる。さらに，2つの剛性マトリックスについて検討を加えると，1)の剛性マトリックスの基本となっているのは，Von-Kármán の理論のひずみ変位関係であり，したがって，この理論は Von-Kármán の理論と同じ程度の適用範囲を有したものである。2) の方法では，変位に対しては制約を加えていない。したがって，有限変位の理論式としては，より大きな変位まで取り扱えるという意味ですぐれている。また有限要素法では，要素を微小に分割しなければ精度の良い解が得にくいということを考えると，2)の方法を用いる利点がここにも存在する。

参考文献

1). Vos, R. G. and W. P. Vann : A finite element tensor approach to plate buckling and postbuckling, Int. Jour. for Nume. Meth. in Eng., Vol. 5, 1973

2). Murray, D. W. and E. L. Wilson : Finite element large deflection analysis of plates, Journal of the E. M. Divsion, ASCE, Vol. 95, No. EM1, Proc. Paper 6398, pp. 143～165, February, 1969