I-52　　空間骨組材の有限変位場に対する考察

大阪大学工学部　正員　林　　正
大阪大学工学部　正員　前田 幸雄

1. まえがき

3次元空間における有限な回転はベクトル則に従わず，回転の合成において可換則は成立しない．しかし，過去の研究においてはこの基本的な概念がまったく認識されていないようである。著者らは，すでに有限な回転を扱うために必要な回転行列を導き，有限回転の厳密な合成手順と3次元空間における部材の座標変換行列を示した[1),2)]。これらの式を用いれば，立体骨組構造物の有限変位解析において平衡条件式と適合条件式を厳密に満足させることができるが，もう一つの基本式である応力と変位の関係式については未だに厳密な式は発表されていない。これは，構造部材の弾性挙動を支配するいわゆる有限変位場，すなわち変位と歪の関係式と部材断面内の変位を表わす変位関数が厳密でないためである．この有限変位場について，最近いくつかの研究成果が報告されているが[3),4)]，いづれの研究においても有限回転に対する認識が不十分であるために，弾性方程式に最低次の非線形項の一部が欠けている．本報告では，過去の研究において示された変位場よりも精度の高い有限変位の表示式を導き，従来の研究において省略されている部材軸方向変位の微係数の2次項は無視できないことを示す．

2. 有限回転に対する回転行列

3次元空間における有限な変位は，平行移動と回転とに分けることができる。平行移動はベクトル則により合成することができるが，有限な回転の合成には回転行列を用いなければならない．剛体の回転は，ある空間ベクトル$\boldsymbol{\phi}$を中心軸として回転する。このときの回転量をα，ベクトル$\boldsymbol{\phi}$の方向の単位ベクトルを$\boldsymbol{e}(\theta_x/\alpha,\ \theta_y/\alpha,\ \theta_z/\alpha)$とすれば，有限な回転に対する回転行列$\mathbb{R}$は，単位行列$\mathbb{E}$を用いて式(1)で表わされる[1)]。

$$\mathbb{R} = \mathbb{E}\cos\alpha + (1-\cos\alpha)\boldsymbol{e}\boldsymbol{e} + \boldsymbol{e}\times\mathbb{E}\sin\alpha \qquad (1) \qquad\qquad \alpha = (\theta_x^2+\theta_y^2+\theta_z^2)^{1/2} \qquad (2)$$

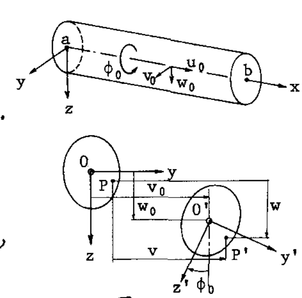
回転角αが無限小の場合には，$\boldsymbol{\phi}=\Delta\boldsymbol{\phi}$とおけば，式(1)は衆知の微小回転による回転行列を表わす。

$$\Delta\mathbb{R} = \mathbb{E} + \boldsymbol{e}\times\mathbb{E}\cdot\Delta\alpha = \mathbb{E} + \Delta\boldsymbol{\phi}\times\mathbb{E} \qquad (3) \qquad\qquad \Delta\boldsymbol{\phi} = (\Delta\theta_x,\ \Delta\theta_y,\ \Delta\theta_z) \qquad (4)$$

回転行列の各要素は省略する[2)]。また，回転の合成手順と回転行列を用いて求められる座標変換行列や有限な変形を受ける部材の材端変位の表示式については，文献1)を参照されたい。

3. 有限変位場

空間骨組材の有限変位を考えるために，図-1に示すような直線材を考える。x軸を部材のせん断中心軸に一致させ，y, z軸をこれと直交右手系をなすように選ぶ．この座標軸方向の任意な断面内の点$P(x, y, z)$の変位成分をu, v, wとし，x軸上の変位をu_0, v_0, w_0，x軸まわりの回軸をϕ_0とする。断面内に位置ベクトル$\boldsymbol{r}$（$=\overrightarrow{OP}$）を考えると，棒理論における断面剛の仮定により，点Pの変位を$\boldsymbol{d}$とすれば，これを平行移動$\boldsymbol{d}_1$と回転$\boldsymbol{d}_2$とに分けることができるので，回転行列を用いて



図－1

$$\boldsymbol{d} = \boldsymbol{d}_1 + \boldsymbol{d}_2 = \boldsymbol{d}_1 + (\mathbb{R}-\mathbb{E})\boldsymbol{r} \qquad (5)$$

となる。ここで，回転角をα，回転中心軸の成分をθ_x, θ_y, θ_zとすれば，変位$\boldsymbol{d}$の各成分は次式のようになる。

$$\left.\begin{aligned}
u &= u_0 + \left\{\frac{\theta_x\theta_y}{\alpha^2}(1-\cos\alpha) - \frac{\theta_z}{\alpha}\sin\alpha\right\}y + \left\{\frac{\theta_x\theta_z}{\alpha^2}(1-\cos\alpha) + \frac{\theta_y}{\alpha}\sin\alpha\right\}z \\
v &= v_0 + (1-\cos\alpha)\left(\frac{\theta_y^2}{\alpha^2}-1\right)y + \left\{\frac{\theta_y\theta_z}{\alpha^2}(1-\cos\alpha) - \frac{\theta_x}{\alpha}\sin\alpha\right\}z \\
w &= w_0 + \left\{\frac{\theta_z\theta_y}{\alpha^2}(1-\cos\alpha) + \frac{\theta_x}{\alpha}\sin\alpha\right\}y + (1-\cos\alpha)\left(\frac{\theta_z^2}{\alpha^2}-1\right)z
\end{aligned}\right\} \qquad (6)_{1\sim3}$$

式(6)で表わされる変位関数 u, v, w は，断面剛の仮定から導かれる次式(7)の微分方程式の解である。

$$\left.\begin{aligned}
\varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} + \underline{\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 = 0 \\
\varepsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z} + \underline{\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2 = 0 \\
\gamma_{yz} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} + \underline{\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)} + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial v}{\partial z}\right) + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right) = 0
\end{aligned}\right\} \qquad (7)_{1\sim3}$$

一方，従来からの研究で用いられている変位関数は，その項を省略して次式で与えられる[3),4)]。

$$\left.\begin{aligned}
u &= u_0 - (y\cos\phi_0 - z\sin\phi_0)\,v_0' - (y\sin\phi_0 + z\cos\phi_0)\,w_0' \\
v &= v_0 - z\sin\phi_0 - y(1-\cos\phi_0) \\
w &= w_0 + y\sin\phi_0 - z(1-\cos\phi_0)
\end{aligned}\right\} \qquad (8)_{1\sim3}$$

式(8)の変位 v, w には y, z 軸まわりの回転が含まれておらず，図－1からわかるように，これらの変位は部材の断面が x 軸まわりにのみ回転した場合の表示式である。すなわち，従来から有限変位場における変位として定義されてきた変位の表示式は，回転が微小な場合の式であり，3軸まわりの有限回転による連成作用を無視した式であることを，式(6)を用いて示してみる。

まず，回転の3成分を次式のようにおく。

$$\theta_x \fallingdotseq \phi_0, \qquad \theta_y \fallingdotseq \tan^{-1}(-dw_0/dx) \fallingdotseq -w_0', \qquad \theta_z \fallingdotseq \tan^{-1}(dv_0/dx) \fallingdotseq v_0' \qquad (9)_{1\sim3}$$

次に，回転の連成作用を無視すれば，断面の回転中心は x 軸に一致するから，式(2)の α は断面のねじり角に一致し，さらにこのねじり角を微小とすれば次の関係式が成り立つ。

$$\alpha \fallingdotseq \phi_0, \qquad \lim_{\phi_0\to 0}\frac{\sin\phi_0}{\phi_0} = \cos\phi_0, \qquad \lim_{\phi_0\to 0}\frac{(1-\cos\phi_0)}{\phi_0} = \sin\phi_0 \qquad (10)_{1\sim3}$$

これらの式(9)，(10)を式(6)に代入し，さらに式 $(6)_{2,3}$ において y 軸と z 軸まわりの回転を無視すれば式(8)の変位関数を導くことができる。以上の考察により，式(8)は部材のねじり角が微小であり，かつ，回転の連成作用を無視した場合に導かれる式であって，有限変位場における厳密な変位を表わしていないことがわかる。

4. 部材軸方向変位の微係数

式 $(8)_{2,3}$ の v, w は，式(7)の下線をほどこした部材軸方向変位 u の微係数の2次項を省略した式の解である[3)]。一般に，これらの2次項は微小項と考えられているが，有限変位理論では無視できないことを示す。

式(6)の近似式を求める。式(2)の回転量が小さくて $\alpha^2 \ll 1$ を仮定することができ，かつ，式(9)が成立つときには，α^3 以上の項を省略して次式を得る。

$$\left.\begin{aligned}
u &= u_0 - v_0' y - w_0' z - \frac{1}{2}\phi_0(w_0' y - v_0' z) \\
v &= v_0 - \phi_0 z - \frac{1}{2}\left\{\phi_0^2 y + \underline{(v_0')^2 y + v_0' w_0' z}\right\} \\
w &= w_0 + \phi_0 y - \frac{1}{2}\left\{\phi_0^2 z + \underline{(w_0')^2 z + v_0' w_0' y}\right\}
\end{aligned}\right\} \qquad (11)_{1\sim3}$$

同じような仮定を用いて式(8)を級数展開し，$\phi_0^2 \ll 1$ として ϕ_0^3 以上の項を省略した場合，式(11)の下線をほどこした項は求められない。すなわち，軸方向変位の微係数の2次項を省略すれば，変位関数に最低次の非線形項の一部が欠けるために，有限変位理論としては不十分なことがわかる。これらの非線形項の影響を数値計算により調べたが，紙数の制限から講演当日に発表することにする。

5. あとがき

3次元空間における有限変位理論を展開するためには，有限回転に対する認識が不可欠である。

1) 前田・林：空間骨組部材の変形と回転について，第30回年次学術講演会講演概要集，I-19，昭和50年10月.
2) 前田・林：立体骨組構造物の有限変位解析，土木学会論文報告集，投稿中.
3) 西野・倉方・長谷川・奥村：軸力と曲げおよびねじりを受ける薄肉断面部材，土木学会論文報告集，No. 225，1974.
4) 結城・前田：薄肉断面構造の三次元挙動の解析，土木学会論文報告集，No. 224，1974.