

愛知工業大学 正員 青木 徹孝

1. はじめに はりの大変形の問題は古くから *Elastica* として知られており、古典的非線形問題の一つであるが、近年の計算機の高速度利用と非線形解析への有限要素法の活発な適用により、なお新しいテーマとなっている。本研究ははりの有限変形解析を仮想変位の原理に基づく有限要素公式化を行い、はり断面上の変位近似の程度による荷重-変形性状の影響を調べたものである。解析例は *Elastica* および数値積分法による結果と比較されている。

2. はりの応力つりあい方程式¹⁾ 仮想変位の原理による物体つりあい方程式は式(1)で表わされる。式中、 σ_{ij} , ϵ_{ij} は応力(キルヒホッフ)およびひずみ(グリーン)の各テンソル量、 t_i , u_i は表面力および変位のベクトルで物体力はないものとする。グリーンノ有限ひずみは式(2)で示される。はりは等断面とし、重に軸がx軸に一致、xy平面内で載荷、変形すると考える。

$$\int_V \sigma_{ij} \delta \epsilon_{ij} dV - \int_S t_i \delta u_i dS = 0 \quad (1)$$

さらに平面応力の法則を仮定し、せん断変形は無視すると

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i} + u_{k,i} u_{k,j}) \quad (2)$$

応力テンソルは式(3)となる。応力テンソルの対称性より

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \sigma_{yx} \\ \sigma_{yx} & 0 \end{bmatrix} \quad (3)$$

$\sigma_{yx} = \sigma_{xy}$ 。式(2), (3)を式(1)に代入し、変位 u_i ($i=1, 2$)

を u, v に、また偏微分記号 $(\cdot)_{,i}$ ($i=1, 2$) をそれぞれ $(\cdot)', (\cdot)_y$ と書きかえ整理すると次式を得る。

$$\int_V \sigma_x \delta u' dV + \frac{1}{2} \int_V \sigma_x \delta (u'u' + v'v') dV + \int_V \sigma_{yx} \delta (u_y + v') dV + \int_V \sigma_{yx} \delta (u'u_y + v'v_y) dV = \int_S (t_1 \delta u + t_2 \delta v) dS \quad (4)$$

上式にはりの断面上の位置によって定まるひずみ式を代入すれば、はり重に軸上でつりあい式が得られる。

3. 断面合応力 はり断面に生ずる合応力のうち、軸方向力 P , 1次モーメント M_y , 2次モーメント M_{yy} , およびせん断力に関する合応力 V_y , V_{yy} を次のように定義する。 V_y , V_{yy} は、はり内部のつりあい関係式(4)からモーメントに関する項 M_y' , M_{yy}' に変換する式(7)。

$$P = \int_A \sigma_x dA, \quad M_y = \int_A \sigma_x y dA, \quad M_{yy} = \int_A \sigma_x y^2 dA$$

$$V_y = \int_A \sigma_{yx} dA, \quad V_{yy} = \int_A \sigma_{yx} y dA \quad (5)$$

$$\frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} = 0 \quad (6)$$

$$V_y = M_y', \quad V_{yy} = M_{yy}'/2 \quad (7)$$

$$u = u_0 - y \sin \theta, \quad v = v_0 - y(1 - \cos \theta) \quad (8)$$

$$\left. \begin{aligned} \sin \theta &= v_0' / \{ (1 + u_0')^2 + v_0'^2 \}^{\frac{1}{2}} \\ \cos \theta &= (1 + u_0') / \{ (1 + u_0')^2 + v_0'^2 \}^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

4. 変位つりあい式 はりの重に軸上の任意点で傾きを θ とすると、重に軸に垂直な断面に沿ってまだけ離れた点 x , y 方向の変位は式(8)で表わされる。同式で、 u_0 , v_0 は重に軸上の x , y 変位であり、 $\sin \theta$, $\cos \theta$ は、はりの微小要素の幾何学的関係から式(9)のように表わすことができる。式(8), (9)よりつりあい式を導き、有限要素定式化を行うこともできるが式は相当複雑となる。ここでは以下2つの近似により変位を表わすことにしよう。

4.1 微小変位式 式(9)で $u_0' \ll 1$, $v_0' \ll 1$ とすると $\sin \theta \approx v_0'$, $\cos \theta \approx 1$ となり、変位式(8)は式(10)

$$u = u_0 - y v_0', \quad v = v_0 \quad (10)$$

式(4)に代入し、さらに断面について積分し、前項で定めた合応力の記号を用いて整理すれば、結局次のつりあい式が得られる。

$$\int_L \delta \langle v_0' v_0'' u_0' \rangle \{ [D_1] + [D_{11}] \} \langle v_0' v_0'' u_0' \rangle^T dx = \int_L \delta \langle v_0' v_0'' u_0' \rangle \langle t_2, -y t_1, t_1 \rangle^T dS \quad (11)$$

ここに

$$\{D_L\} = \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & EI & \cdot \\ \cdot & \cdot & EA \end{bmatrix}, \quad \{D_{NL}\} = \begin{bmatrix} P & \frac{1}{2} M_{yy}' & -M_y' \\ \frac{1}{2} M_{yy}' & M_{yy} & -M_y \\ -M_y' & -M_y & P \end{bmatrix} \quad (12)$$

4.2 近似大変形式

式(9)で v_0' を省略せず、軸方向ひずみのみ $u_0' \ll 1$ として省略すると大変形はりの挙動に一層近くなる。このとき、式(9)、(8)は式(13)、(14)のようになり、これを用いて前と同様、 x および y に関する微分方程式を行ってつりあい式(6)に代入すれば、式(11)と同様の変位つりあい式を得る。ただし $\{D_L\}$ 、 $\{D_{NL}\}$ は式(13)のようになる。

$$\sin \theta = v_0' (1 + v_0'^2)^{-\frac{1}{2}}, \quad \cos \theta = (1 + v_0'^2)^{-\frac{1}{2}} \quad (13)$$

$$u = u_0 - \frac{1}{2} v_0' (1 + v_0'^2)^{-\frac{1}{2}}, \quad v = v_0 - \frac{1}{2} \{1 - (1 + v_0'^2)^{-\frac{1}{2}}\} \quad (14)$$

5. 有限要素化

はり要素のたわみ形を v_0 に對し3次 u_0 に對し2次を補間多項式で近似すれば、要素内の変位は式(16)で表わされる。式中 $\langle f_v \rangle$ 、 $\langle f_u \rangle$ は形状関数、但し $\{v_0\}$ は節点変位、 x_1 、 x_2 は節点座標、 S は x を要素長として無次元表示したものである。式(14)を x に微分したつりあ変位つりあい式(11)に代入し、表面作用力と節点集中荷重におきかえ、さらに S に関する積分を行うとはり要素の剛性マトリックスが表示できるが本法ではこれをガウス積分法により数値計算している。

$$\{D_L\} = \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & EI(1 + v_0'^2)^{-\frac{3}{2}} & \cdot \\ \cdot & \cdot & P \end{bmatrix} \quad (15)$$

$$\{D_{NL}\} = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} \\ \cdot & d_{22} & d_{23} \\ \text{Sym.} & & d_{33} \end{bmatrix}$$

$$d_{11} = P + M_y v_0' (1 + v_0'^2)^{-\frac{5}{2}} \{2(1 + v_0'^2) + 3u_0'\} - 2M_{yy} (1 + v_0'^2)^{-3} v_0'^2 + M_y' u_0' v_0' (1 + v_0'^2)^{-\frac{3}{2}}$$

$$d_{12} = -M_y v_0' (1 + v_0'^2)^{-\frac{3}{2}}, \quad d_{13} = -M_y' (1 + v_0'^2)^{-\frac{1}{2}}$$

$$d_{22} = M_{yy} (1 + v_0'^2)^{-3}, \quad d_{23} = -M_y (1 + v_0'^2)^{-\frac{3}{2}}, \quad d_{33} = P$$

6. 数値解析方法及び計算例

数値解析例としてFig. 1に示す単純ばりに軸力 P とはり中央に横力 $F = 0.1P$ が作用する場合について荷重-変形関係も求めた。はりの細長比は約100であるが、弾性係数 E は構造用鋼の約1/1000に減小させた。断面特性を図中に示す。くり返し計算には Incremental Newton-Raphson 法を用い、解の収束判定はその変形状態に於ける外力を求め、作用力との差を零つりあひ量 $\{uF_i\}$ として次式より定めた。

$$\sqrt{\sum (uF_i)^2} \leq P_{cr} \times 10^{-7}$$

変位式(10)と(14)による数値計算結果をFig. 1に示す。比較のため、同図中に太実線で $E_{\text{Elastic}}^{(2)}$ 曲線も、また、同じ条件のはりについて計算した数値積分法²⁾³⁾による結果を細実線で示す。これらの結果からわかるように変位式(14)による値は数値積分法による曲線とほぼ同一であり、また、たわみが大きくなるに従い E_{Elastic} に漸近している。一方、微小変位式(10)による結果は $\delta/l = 0.06$ あたりからはりの変形が少なくなり、傾角が累積していくことがわかる。

7. おわりに

本研究は著者が1974年9月から一斗岡カナダ・アルバータ州大学で行なつた研究の一部である。指導教授・Dr. Murray に謝意を表します。

参考文献

- 1) S. Rajasekaran, "Finite Element Analysis of Thin Walled Members of Open Section, Doctoral Thesis, Univ. of Alberta 1974.
- 2) Timoshenko, S.P. et al. "Theory of Elastic Stability" McGraw-Hill 2nd Ed. 3) Galambos, T.V. "Structural Members and Frames" Prentice-Hall, 1968.

$$\{v_0\} = \langle f_v \rangle \{v\} = \begin{Bmatrix} (S+2)(S-1)^2/4 \\ (S+1)(S-1)^2/8 \\ (2-S)(S+1)^2/4 \\ (S-1)(S+1)^2/8 \end{Bmatrix}^T \begin{Bmatrix} v_1 \\ v_1' \\ v_2 \\ v_2' \end{Bmatrix} \quad (16)_1$$

$$\{u_0\} = \langle f_u \rangle \{u\} = \begin{Bmatrix} (1-S)/2 \\ (1+S)/2 \end{Bmatrix}^T \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} \quad (16)_2$$

$$\alpha = 1: S = \{x - (x_1 + x_2)/2\} 2/l \quad (16)_3$$

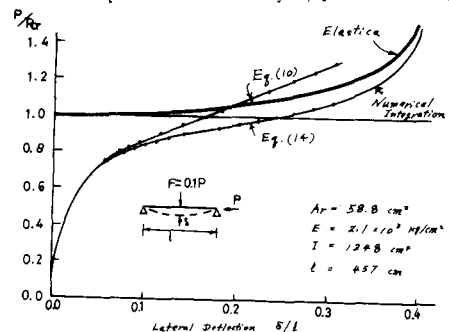


Fig. 1