I-46　固有関数法による深厚梁の曲げ

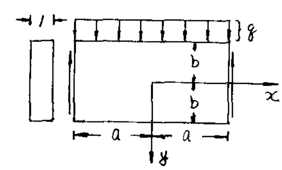
信州大学　学生員　○山下裕章
信州大学　正員　谷本勉之助
信州大学　正員　夏目正太郎

1. まえがき

弾性論による平面応力問題の解は、一般的に同次重調和方程式と緩和された境界条件とを満足している。それらの境界値問題の研究は、今までに数多く発表されているが、実際に課された境界条件に関しての厳密解の数値例は数少ない。

FadleとPaphovichは最初に複素重調和固有関数を用いて、矩形の平面応力問題を扱った。固有関数列の各項は同次重調和方程式と、1組の対向2辺の同次境界条件を満足している。さらに固有関数列の各項は、矩形に対しては、2つの任意な複素常数をもち、それらの常数は他の対向2辺上での境界条件を満足するように決定される。それ故、固有関数法は、矩形の4辺上での境界条件を同時に満足する。固有関数法の適用に関しての困難さは、複素常数の決定にある。調和関数と違って重調和関数は、一般的に、常数の分離決定に対しての展開公式を可能にする直交関係をもたない。それ故、常数の決定を可能にするいくつかの方法が提案されているが、ここでは固有関数と境界条件とを、フーリエ級数に展開する方法をとる。

2. 基礎式



応力関数χは、$\nabla^4\chi=0$を満足する。今、応力関数χは、2つの関数の和で表わされると仮定する。即ち、基本解χ_pと修正解χ_hとの和である。ここで、χ_pとχ_hは重調和解である。課せられた境界条件は式(1)で表わされる。

$$y=-b\ ;\ \sigma_y=-g\ ,\ \tau_{xy}=0\ ,\quad y=+b\ ;\ \sigma_y=\tau_{xy}=0. \qquad \text{-------} \qquad (1\text{-}a)$$

$$x=\pm a\ ;\ \int_{-b}^{b}\tau_{xy}\,dy=\mp g a\ ,\quad \sigma_x=0. \qquad \text{-------} \qquad (1\text{-}b)$$

$x=\pm a$上での境界条件を、緩和すると式(2)となる。

$$x=\pm a\ ;\ \int_{-b}^{b}\tau_{xy}\,dy=\mp g a\ ,\ \int_{-b}^{b}\sigma_x\,dy=\int_{-b}^{b}\sigma_x\cdot y\,dy=0. \qquad \text{-------} \qquad (2)$$

緩和された境界条件(式(1-a)　(2))を満足する基本解χ_pは式(3)で示される。

$$\chi_p=\frac{g}{40b^3}\{y^5-5x^2(y^3-3b^2y+2b^3)\}+\frac{g}{6I}\left(\frac{a^2}{2}-\frac{b^2}{5}\right)y^3\ ,\quad I=\frac{2}{3}b^3. \qquad \text{-------} \qquad (3)$$

式(1)の境界条件から基本解χ_pの境界条件を差引くと、$y=\pm b$上では自由境界、$x=\pm a$上では自己つりあい境界となる。次に修正解χ_hを求める。Fadle-Paphovich固有関数は式(4)である。

$$\chi_h=\sum\frac{b^2}{\lambda_n^2}\lfloor\cos\lambda\rho,\ \sin\lambda\rho,\ \lambda\rho\cos\lambda\rho,\ \lambda\rho\sin\lambda\rho\rfloor_n\,\mathbb{P}_n(\lambda)\cdot\mathbb{K}_n\begin{bmatrix}\mathrm{ch}\,\frac{\lambda x}{b}\\ \mathrm{sh}\,\frac{\lambda x}{b}\end{bmatrix}_n+(\text{conjugate.}),\quad \begin{array}{l}\mathbb{K}_n;\text{複素固有マトリックス}(1\times2),\ \rho=\frac{y}{b},\\ \mathbb{P}_n(\lambda);\text{境界マトリックス}(4\times1)\end{array} \qquad (4)$$

λ_nは$2\lambda\pm\sin 2\lambda=0$より得られる固有値である。最終的に、$x=\pm a$上での自己つりあい境界条件を満足するように$\mathbb{K}_n$を決定し、得られた修正解を基本解と加えることにより、式(1)を満足する完全解が得られる。

3. あとがき

この手法によれば、自己つりあい力による局所的影響をも考慮した厳密解が得られる。尚、解析の詳細と数値結果は、当日発表する。

〈参考文献〉

1). Fadle. J., "Die Selbstspannungs-Eigenwert-Funktionen Scheibe." Ingenieur-Archiv. Berlin. Germany. Vol. 11. 1941. pp 125 ~ 149.
2). Gaydon. F. A., "The Rectangle, Under General Equilibrium Loading in Generalized Plane Stress." Proceedings. Royal Society London. Series A. Vol. 283. Jan., 1965. pp. 356 ~ 378.
3). S.P. Timoshenko and J.N. Goodier, "Theory of Elasticity." 3rd ed., pp. 46 ~ 50