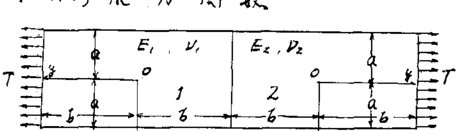
I-45　固有関数法による複合板の引張り（第3報）

信州大学　正員　夏目正太郎
〃　〃　谷本勉之助
〃　〃　石川　清志

1．はじめに．　固有関数法を用いた所の棒または板（矩形，平行四辺形，扇形）の解析に、われわれ研究グループは取組ん来ており、幾つかの成果を挙げてすでに発表して来ている。外国文献にもEIGENFUNCTION METHOD の標題が見られ、開発されて行く様子がうかがえるのであって、われわれもその刺激を受けて、第一弾性体については比較的良好な結果を得ている。　建設技研の島田俊樹君、飛島建設の滝本幸夫君達の成果を挙げることが出来る。この解法の特徴としては、2次元ひろがりの第1境界条件にて固有値をもとめ、第2境界条件を満足するように、未定常数群を決定することにある。従って、第2境界条件の満足される程度は、第1境界条件のそれよりもやや劣るが、実効的な欠点にはならない。従来からある弾性解と比較したとき、損色のない結果が得られている。これが、2枚板をつなぐとき、いやなことが生ずるようである。その1つは、用いられる関数は第2境界上では自己平衡（self equilibrium）であることで、これがあって第2境界条件を満足するといってよい。所が板を2枚つき合せたとき、継ぎがあたかも1枚板の内部の如き存在になり、そこにおいて、ひずみ、応力の受け渡しが完全に行われて、一方から他方へ移行するのでなくてはならない。そして、それぞれの板のもう一方の境界が全体としての境界になり、第2境界条件を作ることになる。この継ぎの受け渡しが谷本演算子法でいう所の移行子（SHIFT-OPERATOR）であり、これが如何に作られるかにかかってくる。この様に連続した弾性体の解法で、固有関数法を用いたものをまだ入手していないので、われわれの体験上いやなこととして取り上げてみたのである．いやなことの2つ目は、単一弾性体をつなげるとき、2次元的ひろがりに接続して行くと、第1境界条件を得るために、その方向へも移行子を作用させてからでないと、固有値をもとめることが出来ないので、いくつかの固有値をもとめるだけでも大変な計算量になることが推測される。同じような標題で3回目の報告になるが感じた事の一端を述べただけである．

2．Airy 応力関数



図－1

弾性体の力学系がy軸対称であるので、応力関数をつぎのようにえらび

$$\chi=\sum^{n}\frac{1}{\lambda_i^2}\lfloor \cos\lambda x\ ,\ \lambda x\sin\lambda x\rfloor N_i\begin{bmatrix}\cosh\lambda y\\ \sinh\lambda y\end{bmatrix}+\frac{Tx^2}{2} \tag{1}$$

とす．λは固有値でN_iは未定常数マトリクスである．この第1項が第2項を修正する項であり、第2境界条件によってN_iが決定されるものである。勿論 (1)式は

$$\nabla^4\chi=0 \tag{2}$$

の適合条件微分方程式を満足するものである。　固有値 λ_i を決める第1境界条件は、y軸に平行な対向2辺上で

$$\begin{bmatrix}\sigma_x\\ \tau_{xy}\end{bmatrix}_{x=\pm a}=0 \tag{3}$$

直応力とせん断応力が消えることにより第1境界条件としてあたえられる (3) 式より固有値方程式が

$$2\lambda_i+\sin 2\lambda_i=0 \tag{4}$$

となり、固有値 λ_i が 求まる。従って (3) 式が成立する以上

$$\mathbb{N}_i = \begin{bmatrix} -\lambda\sin\lambda \\ \cos\lambda \end{bmatrix} \mathbb{C}_i \qquad (5)$$

のような変換をほどこすことが出来、応力関数 (1) は つぎのように改められる。すなわち

$$\chi_i = \sum \frac{1}{\lambda} \lfloor \cos\lambda x,\ \lambda x\sin\lambda x \rfloor \begin{bmatrix} -\lambda\sin\lambda \\ \cos\lambda \end{bmatrix} \lfloor \cosh\lambda y,\ \sinh\lambda y \rfloor \mathbb{C}_i + \frac{Tx^2}{2} \qquad (6)$$

となる。

3. つなぎの状態ベクトル. 2枚の性質を異にする板を突き合せて、連続板にするとき x 方向の変位が連続であり、y 軸方向の直応力、とその辺におけるせん断応力がつり合い状態にあることが必要なわけで、この状態ベクトルを相方の板について作り、連続させることによって、移行子が得られることになる。状態ベクトルは

$$\mathbb{W}(x,y) = \{ u,\ v,\ \sigma_y,\ \tau_{xy} \}$$

$$= \sum_i \mathbb{X}_i(x) \cdot \mathbb{Y}_i(y)\, \mathbb{C}_i + \mathbb{W}_p(x,y) \qquad (7)$$

で、それぞれ

$$\mathbb{X}_i(x) = \begin{bmatrix} \frac{(1+\nu)}{E\lambda} \\ \frac{(1+\nu)}{E\lambda} \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}^D \begin{bmatrix} \sin\lambda x, & \frac{1-\nu}{1+\nu}\sin\lambda x - \lambda x\cos\lambda x \\ -\cos\lambda x, & \frac{2}{1+\nu}\cos\lambda x - \lambda x\sin\lambda x \\ -\cos\lambda x, & 2\cos\lambda x - \lambda x\sin\lambda x \\ \sin\lambda x, & -\sin\lambda x - \lambda x\cos\lambda x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\lambda\sin\lambda \\ \cos\lambda \end{bmatrix},\quad \mathbb{Y}(y) = \begin{bmatrix} \cosh\lambda y, & \sinh\lambda y \\ \sinh\lambda y, & \cosh\lambda y \\ \cosh\lambda y, & \sinh\lambda y \\ \sinh\lambda y, & \cosh\lambda y \end{bmatrix},\quad \mathbb{W}_p(x,y) = T \begin{bmatrix} -\frac{\nu x}{E} \\ \frac{(y+b)}{E} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad (8)$$

の内容をもっている。こゝで $\mathbb{X}(x)$ を Legendre 級数の Neumann 展開によって、板の接続部における移行子が作られ、第2境界条件のもとで、未定常数 C_i が決定されることになる。

4. 計算例. $E_1 = E_2$, $\nu_1 = 0.3$, $\nu_2 = 0.0$ と $\nu_2 = 0.2$, $b = 2a$ の場合について試みた結果、未定常数の収束性が甚だよく、固有値をそれ程多く必要としない。このことは、展開項の数を沢山とらなくてもよいことになり、計算能率上非常に重要なことである。 $\nu_2 = 0.0$ より $\nu_2 = 0.2$ としたものの方がすべての量が大きく出ている。

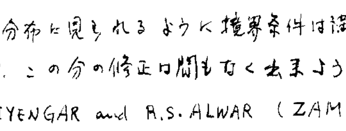


図 - 2

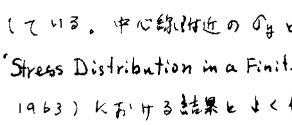


図 - 3

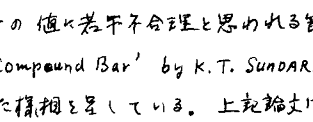


図 - 4

つなぎ附近では当然のことながら乱れが見え σ_x では符号が逆となり、σ_y は対向辺附近に最大値があらわれ τ_{xy} の分布に見られるように境界条件は満足している。中心線附近の σ_y と v の値に若干不合理と思われる節があるが、この分の修正は間もなく出来よう。'Stress Distribution in a Finite Compound Bar' by K. T. SUNDARA RAJA IYENGAR and R. S. ALWAR (ZAMM. 1963) における結果とよく似た様相を呈している。上記論文は、固有関数法でなく境界値問題と解いたものである。

5. おわりに. こゝでは 平面応力問題で比較的単純な場合に終始して来たが、移行演算子の複雑な場合には踏み入れていないし、すでに述べたように移行子を通して固有値決定の解決を見ていないので、固有関数法の利用面が十分開拓されたわけではない。しかし、境界条件を満足させる上では非常に優れた武器と思う。

一連の研究に際し、助力下さった前記2君と、院生2年山下裕章君に謝意を表すものである。数値計算には信大計算センターの端末機より東大 H I T A C 8700/8800 を使用したことを附記す。