I-31　せん断変形を考慮したはりの理論

東京大学　正員　西野文雄
ノース・ウェスタン大学　学生員　椿　龍哉

初等はり理論でせん断変形を考慮した理論にいわゆるTimoshenko はりがある。Timoshenkoはりでは平面保持を考えているのに対し、せん断変形が大きくなると平面保持の仮定が成り立たなくなり、直応力も中立軸からの距離に比例しなくなる。このような現象はせん断遅れと呼ばれており、箱桁橋の解析で問題となることがある。桁のせん断おくれの解析では、桁を構成している板に分解し、板の面内応力に関する二次元問題として解析されることが多い。

ここでは初等はり理論を修正し、せん断変形の影響を考慮に入れ、せん断おくれ現象を棒理論の範囲で解析する試みについて報告する。初等はり理論による解析でほぼ満足できると思われるものの支間長が多少短かめの桁の設計を行なうとき、せん断遅れの影響を二次元問題として全く異なった解析をすることなく、棒理論の延長で調べることができれば便利であろうと考えたのがこのような試みの大きな理由である。

説明を簡単にするため図に示す長方形断面の単純はりを考える。初等はり理論ではせん断ひずみを零と仮定する。この仮定を用いると解として求まる直応力分布は中立軸からの距離に比例する。この直応力とつり合う条件からせん断応力を決めると放物線分布する。このせん断応力から決まるせん断ひずみは仮定したせん断ひずみと一致せず、はり理論では仮定と仮定から得られる結果の間に矛盾がある。せん断ひずみを零とする仮定のかわりにはり理論の結果として求まるせん断ひずみ分布を仮定し、棒理論を展開することができよう。すなわちせん断ひずみを零と仮定する初等はり理論を棒材の逐次近似理論の第一近似理論とし、この解として得られる放物線分布するせん断ひずみを仮定として第二近似理論を展開する。この操作をくり返し、その結果せん断ひずみの分布がある解に収束するものとすると仮定と理論展開の結果得られる解の間に矛盾がなくなる。

問題が与えられたとき、第一次近似解としての数値解を求め、これをもとに第二近似理論を組み立てるのであれば、計算が繁雑となり、実用的な意味がない。せん断ひずみを零と仮定したとき、解としてのせん断ひずみが放物線分布することは数値計算をするまでもなくわかる。同様にn回の逐次近似をしたときのせん断ひずみの分布も求まる。このことから想像されるようにn回逐次近似したときのはりの内部でのせん断ひずみ、直ひずみの分布形、および変位の状態がわかるので、その大きさのみを荷重条件から決める境界値問題としてせん断変形を考慮したはりの理論の定式化をする。

図のはりの問題ではn回逐次近似したときのz方向の変位成分w_nとy方向の変位成分vとの間には次の関係がある。

$$w_n = -\sum_{i=1}^{n} f_{2i-1}(y)\, v^{(2i-1)}$$

ここに

$$f_1(y) = y, \quad f_{2i-1}(y) = \frac{E}{G}\left[\frac{1}{A}\int_{-c}^{c} t\int_{0}^{y}\frac{1}{t}\int_{-c}^{y} f_{2i-3}(y)\, t\,dy\,dy\,dy - \int_{0}^{y}\frac{1}{t}\int_{-c}^{y} f_{2i-3}(y)\, t\,dy\,dy\right]$$

第一近似のwは$w_1 = -yv'$となり初等はり理論の関係式と一致する。この関係を使って仮想仕事の原理を用いてつり合い式を導くと

$$\sum_{i=1}^{n} E D_{2i-1}\, v^{(2i+3)} = q$$

$D_{2i-1} = \int_{c}^{c} y f_{2i-1}(y)\, t\,dy$ は断面量であり、D_1は断面2次モーメントとなる。

図に示す荷重条件、境界での応力条件はTimoshenkoがその著“Theory of Elasticity”のなかで二次元問題として扱っているものである。ここに導いた理論を用いて同じ問題を例題として扱った。その結果$n=3$で直応力分布、せん断応力分布ともにTimoshenkoの解と一致する結果を得た。$n=3$で解は収束しており、$n>3$にしても解は変化しない。中立軸の変位もTimoshenkoの解と一致した。

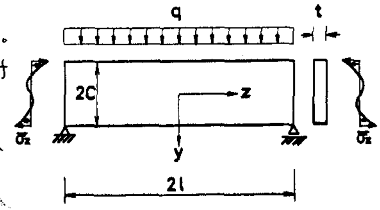

図　長方形断面の単純はり