I-29　　薄肉直線材のせん断変形解析

秋田大学土木工学科　　学生員　　堀江　保
秋田大学土木工学科　　正　員　　稼農知徳

1、はじめに

本論文では薄肉直線材の曲げおよびねじりに伴うせん断変形を考慮したひずみ場を明示し、仮想仕事の原理によって微分方程式および境界条件を示した。さらに有限要素法と類似の方法により剛性マトリックスを誘導できることも示した。これまでせん断変形解析において応力のつりあい式の扱い方に難点があった。本解析においては、せん断変形を無視した変位でひずみ成分を表わしそれによって直応力を求め応力のつりあいを満足すべくひずみの修正を行った。その際用いた基本的仮定は ―[I] 断面不変を保持する。[II] 薄肉要素の板厚中心面に垂直で部材軸線に平行な面内でのせん断ひずみは無視する。― などである。

2．ひずみ成分の表示

変位とひずみの関係は次式を用いる。

$$\varepsilon_x=\frac{\partial \bar{u}}{\partial x},\qquad \varepsilon_y=\frac{\partial \bar{v}}{\partial y},\qquad \varepsilon_z=\frac{\partial \bar{w}}{\partial z} \tag{1}$$

$$\gamma_{xy}=\frac{\partial \bar{u}}{\partial y}+\frac{\partial \bar{v}}{\partial x},\quad \gamma_{yz}=\frac{\partial \bar{v}}{\partial z}+\frac{\partial \bar{w}}{\partial y},\quad \gamma_{zx}=\frac{\partial \bar{u}}{\partial z}+\frac{\partial \bar{w}}{\partial x} \tag{2}$$

ここで(u,v,w) $(\bar{u},\bar{v},\bar{w})$は横断面上の任意の原点，および薄肉断面上の任意点のx,y,z方向変位である。

仮定[I]より　　$\bar{u}=u-y\varphi$,　$\bar{v}=v+x\varphi$　　(3)

解析の便のため薄肉中心線に沿ったS座標，およびそれと直角なn座標を用いるとせん断ひずみは次式になる。

$$\gamma_{sz}=\frac{\partial \bar{w}}{\partial s}+u'\frac{\partial x}{\partial s}+v'\frac{\partial y}{\partial s}+r_s\varphi' \tag{4}$$

$$\gamma_{nz}=\frac{\partial \bar{w}}{\partial n}+u'\frac{\partial x}{\partial n}+v'\frac{\partial y}{\partial n}+r_n\varphi' \tag{5}$$

仮定[II]を(5)式に適用し、nについて積分すると

$$\bar{w}=\bar{w}^*-(y-y^*)v'-(x-x^*)u'-r_n\varphi' n \tag{6}$$

ここで＊は中心線上のものを示す。

微小要素の応力のつりあいを考えると外力を無視して

$$\gamma_{sz}^*=\frac{g_1}{Gt}-\frac{1}{Gt}\int_{s_1}^{s}\frac{\partial}{\partial z}(\sigma^* t)\,ds \tag{7}$$

(7)式において初め直応力とつりあうせん断変形を無視し、そのときの変位を$\bar{w}_b$, u_b, v_b, φ_bとすると(4)式と、(7)式において$\sigma_z^*=0$とおいたものより次式を得る。

$$\frac{\partial \bar{w}_b^*}{\partial s}=\frac{g_1}{Gt}-u_b'\frac{\partial x^*}{\partial s}-v_b'\frac{\partial y^*}{\partial s}-r_s^*\varphi_b' \tag{8}$$

(8)式中g_1は変位の連続条件$\oint\frac{\partial \bar{w}_b^*}{\partial s}ds=0$よりきまり，(8)式をSで積分して、せん断変形を無視した変位で表示した(6)式に代入すると

$$\bar{w}_b=\bar{C}_0-u_b'(x-x_0^*)-v_b'(y-y_0^*)-(\bar{\omega}+n r_n)\varphi_b'$$

ここで　　(9)

$$\bar{\omega}=\int_0^s\left\{r_s^*-\frac{1}{t}\frac{\oint r_s^* ds}{\oint\frac{1}{t}ds}\right\}ds \qquad \text{である。}$$

(9)式の積分定数$\bar{C}_0$は薄肉断面上原点Cと横断面原点Dを$t=0$の仮想薄板[1]で結ぶことによりD上の変位w_bとなる。従って

$$\bar{w}_b=w_b-u_b'x-v_b'y-\omega\varphi_b' \tag{10}$$

ここでそり体積ゼロを満たすようωを選ぶとωは次式で与えられる。

$$\omega=\bar{\omega}+r_n n-\frac{1}{F}\int_F(\bar{\omega}+r_n\cdot n)\,dF \tag{11}$$

(10)式によって直応力は次式になる。

$$\sigma_z^*=E\frac{\partial \bar{w}_b^*}{\partial z}=-E(v_b'' y^*-u_b'' x^*-\omega^*\varphi_b'') \tag{12}$$

その際せん断変位の軸方向成分は無視した。

(12)式を(7)式に代入し、応力のつりあいを満足すべくひずみの修正を行うと、(7)式以下同様の手順を繰り返すことにより軸方向変位は次のようになる。

$$\bar{w}=w-v'y-u'x-\omega\varphi'+\frac{E}{G}(B_x v_b'''+B_y u_b'''+B_\omega\varphi_b''') \tag{13}$$

ここで例えばB_xは次式で定義される。

$$B_x=\int_0^s\frac{1}{t}S_x\,ds \qquad S_x=S_{x0}-S_{x1}$$

$$S_{x0}=\int_0^s y^* t\,ds \qquad S_{x1}=\left(\oint\frac{1}{t}S_{x0}ds\right)\Big/\left(\oint\frac{1}{t}ds\right)$$

B_y, B_ωについても同様に定義される。

(13)式においてv_b''', u_b''', φ_b'''を独立変数として新たに次のパラメーターで置き換える。

$$v_b'''=\mathbb{V},\qquad u_b'''=\mathbb{U},\qquad \varphi_b'''=\Phi \tag{14}$$

(14)式を用いると(13)式は次のように表わせる。

$$\bar{w}=w-v'y-u'x-\omega\varphi'+\frac{E}{G}(B_x\mathbb{V}+B_y\mathbb{U}+B_\omega\Phi) \tag{15}$$

上式によってひずみ成分は次式のように求められる。

$$\varepsilon_z=\frac{\partial \bar{w}}{\partial z}=w'-v''y-u''x-\omega\varphi''+\frac{E}{G}(B_x\mathbb{V}'+B_y\mathbb{U}'+B_\omega\Phi') \tag{16}$$

$$\gamma_{sz}=\Theta\varphi'+\frac{E}{Gt}(S_x\mathbb{V}+S_y\mathbb{U}+S_\omega\Phi) \tag{17}$$

(17)式のΘは開断面では$2n$，閉断面では$\left(\oint r_s^* ds\right)/\left(\oint\frac{1}{t}ds\right)+2n$である。

3、微分方程式と境界条件　(16)(17)式で表わされるひずみ成分を用い、仮想仕事の原理によってつりあい方程式および境界条件を求める。

内部ひずみエネルギーΠ_iはε_z, γ_{sz}以外のひずみ成分はゼロだから次式で与えられる。

$$\Pi_i=\int_{z_1}^{z_2}\int_F(\sigma_z\cdot\varepsilon_z+\tau_{sz}\cdot\gamma_{sz})\,dF\,dz \tag{18}$$

一方外部ひずみエネルギーΠ_aは

$$\Pi_a=\int_{z_1}^{z_2}\int_F(p_{xd}\,\bar{u}+p_{yd}\,\bar{v}+p_{zd}\,\bar{w})\,dF\,dz+\left[\int_F(\sigma_z\bar{w}+\tau_{sz}\xi)\,dF\right]_{z_1}^{z_2} \tag{19}$$

(16)(17)式を(18)式に代入し、$\xi=lu+mv+r_s\varphi$，および(3)(15)式を(19)式に代入し各々変分をとり仮想仕事の原理$\delta\Pi_i-\delta\Pi_a=0$を適用すると$\delta w,\delta v,\delta u,\delta\varphi$ $\delta V,\delta U,\delta\Phi$の任意性より次の微分方程式を得る。

$$E(Fw''-Z_xv'''-Z_yu'''-Z_\omega\varphi''')+E_g(K_{fx}V''+K_{fy}U''+K_{f\omega}\Phi'')+p_z=0$$

$$E(Z_xw'''-J_xv^{IV}-J_{xy}u^{IV}-C_x\varphi^{IV})+E_g(K_{xx}V'''+K_{yx}U'''+K_{\omega x}\Phi''')+p_y+m_x'=0$$

$$E(Z_yw'''-J_{xy}v^{IV}-J_yu^{IV}-C_y\varphi^{IV})+E_g(K_{xy}V'''+K_{yy}U'''+K_{\omega y}\Phi''')+p_x-m_y'=0$$

$$E(Z_\omega w'''-C_xv^{IV}-C_yu^{IV}-J_\omega\varphi^{IV})+E_g(K_{x\omega}V'''+K_{y\omega}U'''+K_{\omega\omega}\Phi''')+GJ_z\varphi''+E(D_{sx}V'+D_{sy}U'+D_{s\omega}\Phi')+m_z+m_\omega'=0$$

$$-E_g(K_{fx}w''-K_{xx}v'''-K_{xy}u'''-K_{x\omega}\varphi''')-E_{gg}(R_{xx}V''+R_{xy}U''+R_{x\omega}\Phi'')+ED_{sx}\varphi'+E_g(D_{xx}V+D_{xy}U+D_{x\omega}\Phi)-h_{px}=0$$

$$-E_g(K_{fy}w''-K_{yx}v'''-K_{yy}u'''-K_{y\omega}\varphi''')-E_{gg}(R_{xy}V''+R_{yy}U''+R_{y\omega}\Phi'')+ED_{sy}\varphi'+E_g(D_{xy}V+D_{yy}U+D_{y\omega}\Phi)-h_{py}=0$$

$$-E_g(K_{f\omega}w''-K_{\omega x}v'''-K_{\omega y}u'''-K_{\omega\omega}\varphi''')-E_{gg}(R_{x\omega}V''+R_{y\omega}U''+R_{\omega\omega}\Phi'')+ED_{s\omega}\varphi'+E_g(D_{x\omega}V+D_{y\omega}U+D_{\omega\omega}\Phi)-h_{p\omega}=0 \tag{20)a-g}$$

境界条件は$z=z_1$および$z=z_2$において

$\delta w=0$　または　$E(Fw'-Z_xv''-Z_yu''-Z_\omega\varphi'')+E_g(K_{fx}V'+K_{fy}U'+K_{f\omega}\Phi')-N_z=0$

$\delta v=0$　または　$E(Z_xw''-J_xv'''-J_{xy}u'''-C_x\varphi''')+E_g(K_{xx}V''+K_{yx}U''+K_{\omega x}\Phi'')+m_x-Q_y=0$

$\delta v'=0$　または　$E(Z_xw'-J_xv''-J_{xy}u''-C_x\varphi'')+E_g(K_{xx}V'+K_{yx}U'+K_{\omega x}\Phi')-M_x=0$

$\delta u=0$　または　$E(Z_yw''-J_{xy}v'''-J_yu'''-C_y\varphi''')+E_g(K_{xy}V''+K_{yy}U''+K_{\omega y}\Phi'')-m_y-Q_x=0$

$\delta u'=0$　または　$E(Z_yw'-J_{xy}v''-J_yu''-C_y\varphi'')+E_g(K_{xy}V'+K_{yy}U'+K_{\omega y}\Phi')-M_y=0$

$\delta\varphi=0$　または　$E(Z_\omega w''-C_xv'''-C_yu''-J_\omega\varphi''')+E_g(K_{x\omega}V''+K_{y\omega}U''+K_{\omega\omega}\Phi'')+GJ_z\varphi'+E(D_{sx}V+D_{sy}U+D_{s\omega}\Phi)+m_\omega-T_z=0$

$\delta\varphi'=0$　または　$E(Z_\omega w'-C_xv''-C_yu''-J_\omega\varphi'')+E_g(K_{x\omega}V'+K_{y\omega}U'+K_{\omega\omega}\Phi')-M_\omega=0$

$\delta V=0$　または　$E_g(K_{fx}w'-K_{xx}v''-K_{xy}u''-K_{x\omega}\varphi'')+E_{gg}(R_{xx}V'+R_{xy}U'+R_{x\omega}\Phi')-H_x=0$

$\delta U=0$　または　$E_g(K_{fy}w'-K_{yx}v''-K_{yy}u''-K_{y\omega}\varphi'')+E_{gg}(R_{xy}V'+R_{yy}U'+R_{y\omega}\Phi')-H_y=0$

$\delta\Phi=0$　または　$E_g(K_{f\omega}w'-K_{\omega x}v''-K_{\omega y}u''-K_{\omega\omega}\varphi'')+E_{gg}(R_{x\omega}V'+R_{y\omega}U'+R_{\omega\omega}\Phi')-H_\omega=0$　(21)a-j

ここで外力および断面力は次式で定義されるものを用いた。

$P_x=\int_F p_{xd}\,dF$, $P_y=\int_F p_{yd}\,dF$, $P_z=\int_F p_{zd}\,dF$, $m_x=\int_F p_{zd}\cdot y\,dF$

$m_y=-\int_F p_{zd}\cdot x\,dF$, $m_\omega=\int_F p_{zd}\cdot\omega\,dF$, $m_z=\int_F(p_{yd}\cdot x-p_{xd}\cdot y)\,dF$

$N_z=\int_F\sigma_z\,dF$, $M_x=\int_F\sigma_z\cdot y\,dF$, $M_y=\int_F\sigma_z\cdot x\,dF$, $M_\omega=\int_F\sigma_z\cdot\omega\,dF$

$Q_x=\int_F\tau_{sz}\cdot l\,dF$, $Q_y=\int_F\tau_{sz}\cdot m\,dF$, $T_z=\int_F\tau_{sz}\cdot r_s\,dF$

$h_{px}=\int_F\frac{E}{G}p_{zd}\cdot B_x\,dF$,　$h_{py}=\int_F\frac{E}{G}p_{zd}\cdot B_y\,dF$

$h_{p\omega}=\int_F\frac{E}{G}p_{zd}\cdot B_\omega\,dF$,　$H_x=\int_F\frac{E}{G}\sigma_z\cdot B_x\,dF$

$H_y=\int_F\frac{E}{G}\sigma_z\cdot B_y\,dF$,　$H_\omega=\int_F\frac{E}{G}\sigma_z\cdot B_\omega\,dF$

さらに弾性係数として　$E_g=\frac{E^2}{G}$, $E_{gg}=\frac{E^3}{G^2}$ を用いた。

また断面値として従来のものの他例えば次のもの等を用いた。

$D_{sx}=\int_F\frac{\theta S_x}{t}dF$, $D_{s\omega}=\int_F\frac{\theta S_\omega}{t}dF$, $K_{fx}=\int_F B_x\,dF$, $K_{f\omega}=\int_F B_\omega\,dF$

$K_{xx}=\int_F B_x\cdot y\,dF$, $K_{x\omega}=\int_F B_x\cdot\omega\,dF$, $K_{yx}=\int_F B_y\cdot y\,dF$, $K_{y\omega}=\int_F B_y\cdot\omega\,dF$

$K_{\omega x}=\int_F B_\omega\cdot y\,dF$, $K_{\omega\omega}=\int_F B_\omega\cdot\omega\,dF$, $D_{xy}=\int_F\frac{S_xS_y}{t^2}dF$, $D_{x\omega}=\int_F\frac{S_xS_\omega}{t^2}dF$

$D_{y\omega}=\int_F\frac{S_yS_\omega}{t^2}dF$, $R_{xy}=\int_F B_xB_y\,dF$, $R_{x\omega}=\int_F B_xB_\omega\,dF$, $R_{y\omega}=\int_F B_yB_\omega\,dF$

(20)(21)式中たわみu, Uのみに注目し外力項に曲げモーメントをとりUを消却すると微分方程式と境界条件は次のようになる。

$$u''-\frac{1}{k^2}u^{IV}=-\frac{\bar{M}}{EJ_y}+\frac{n}{k^2}\frac{\bar{M}''}{EJ_y} \tag{22}$$

$z=z_1$および$z=z_2$において

$$u'''=-n\frac{\bar{M}'}{EJ_y}\qquad u''=-n\frac{\bar{M}}{EJ_y} \tag{23)a,b}$$

ここで　$n=1/(1-K_{yy}^2/J_yR_{yy})$,　$k^2=\frac{G}{E}n\frac{D_{yy}}{R_{yy}}$　(24)

これはn, k^2の内容は異なるがE.REISSNERによって与えられた形と一致する。[2)]

4、剛性マトリックス　ひずみ成分において変位および自由度を次のべき級数で近似すると、有限要素法と類似の方法を用い20×20の剛性マトリックスが求められる。

$u=a_0+a_1z+a_2z^2+a_3z^3$　　$U=a_4+a_5z$

$v=b_0+b_1z+b_2z^2+b_3z^3$　　$V=b_4+b_5z$

$w=c_0+c_1z$

$\varphi=d_0+d_1z+d_2z^2+d_3z^3$　　$\Phi=d_4+d_5z$

参考文献　1). 西野他：軸力と曲げおよびねじりを受ける薄肉断面部材（論文集 225号）　2). ANALYSIS of SHEAR LAG IN BOX BEAMS BY THE PRINCIPLE of MINIMUM POTENTIAL ENERGY　By E. REISSNER (Quarterly Applied Mec 1946)