

大阪市立大学 正員 園田恵一郎

大阪市立大学 正員 堀川都志雄

大阪市立大学 学生員 廣瀬 清泰

1. はしげき 鋼板とコンクリート板の合成構造の事例としては、サンドウィッチ床版、覆工板、鋼板張付R.C.床版などが知られる。これらの合成板の力学的問題の一つに鋼板とコンクリート板の接合面での付着応力（直応力とせん断応力）の解明がある。本研究では、鋼・コンクリート合成板を、図-1に示すような各層で弾性係数が異なる等方性積層板と見なし、それぞれの層に三次元弾性論に基づく厚板理論を適用し、これらの各接合面における変位を連続させて、応力解析を行った。

2. 解析方法

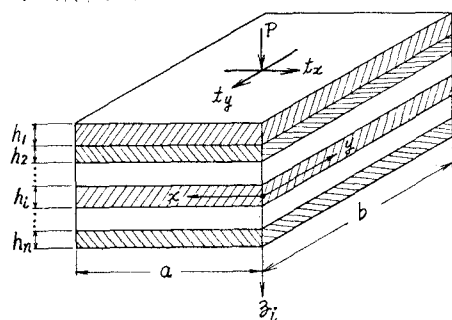


図-1

各層の中央面内にそれぞれ x, y 軸、下方に z 軸をとる。

なお、添字 i は i 層目を意味するものとする。いま、 i 層に対して、Galerkin-Vector G_z^i 、Boussinesq の関数 φ_z^i を下記のように与える。

$$\left. \begin{aligned} G_z^i &= \sum_m \left[C_1^i \operatorname{sh} \gamma z_i + C_2^i \operatorname{ch} \gamma z_i + C_3^i \beta_i \operatorname{sh} \beta_i + C_4^i \beta_i \operatorname{ch} \beta_i \right] \sin \alpha_m x \cdot \cos \beta_n y \\ \varphi_z^i &= \sum_m \left[C_5^i \operatorname{sh} \gamma z_i + C_6^i \operatorname{ch} \gamma z_i \right] \cos \alpha_m x \cdot \cos \beta_n y \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

ここで $\alpha_m = \frac{m\pi}{a}$, $\beta_n = \frac{n\pi}{b}$, $\gamma^2 = \alpha_m^2 + \beta_n^2$, $\operatorname{ch} \gamma z_i = \cosh \gamma z_i$, $\operatorname{sh} \gamma z_i = \sinh \gamma z_i$

$C_1^i, \dots, C_6^i$ は上・下面での境界条件および各層間の変位・応力の連続条件より決定される未定定数である。

各変位を G_z^i, φ_z^i で表わせば、

$$2G_i U_i = -\frac{\partial^2 G_z^i}{\partial x^2 \partial z_i} + 2\frac{\partial \varphi_z^i}{\partial y}, \quad 2G_i V_i = -\frac{\partial^2 G_z^i}{\partial y^2 \partial z_i} - 2\frac{\partial \varphi_z^i}{\partial x}, \quad 2G_i W_i = 2(1-\nu_i) \Delta G_z^i - \frac{\partial^2 G_z^i}{\partial z_i^2} \quad (2)$$

ここで $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z_i^2}$, $G_i = \frac{E_i}{2 \cdot (1-\nu_i)}$, ν_i : ポアソン比, E_i : ヤング率, $i = 1, \dots, n$

また、応力は式(2)と Hooke の法則により与えられる。

接合面における変位の連続条件式は次のように与えられる。

$$\left[U_i \right]_{z_i = h_{i-1/2}} = \left[U_{i+1} \right]_{z_{i+1} = -h_{i+1/2}}, \quad \left[V_i \right]_{z_i = h_{i-1/2}} = \left[V_{i+1} \right]_{z_{i+1} = -h_{i+1/2}}, \quad \left[W_i \right]_{z_i = h_{i-1/2}} = \left[W_{i+1} \right]_{z_{i+1} = -h_{i+1/2}} \quad (3)_{1,2,3}$$

同様に、応力の連続条件式は次のように与えられる。

$$\left[\tau_{xz}^i \right]_{z_i = h_{i-1/2}} = \left[\tau_{xz}^{i+1} \right]_{z_{i+1} = -h_{i+1/2}}, \quad \left[\tau_{yz}^i \right]_{z_i = h_{i-1/2}} = \left[\tau_{yz}^{i+1} \right]_{z_{i+1} = -h_{i+1/2}}, \quad \left[\sigma_z^i \right]_{z_i = h_{i-1/2}} = \left[\sigma_z^{i+1} \right]_{z_{i+1} = -h_{i+1/2}} \quad (4)$$

式(3)と式(4)を連立させて、直接未定定数 $C_1^i, \dots, C_6^i$ を決定することができるが、 $C_1^i, \dots, C_6^i$ の係数行列の次数が大きくなって、応力の計算には精度が悪くなる。そこで各接合面における応力 $\tau_{xz}^i, \tau_{yz}^i, \sigma_z^i$ を未知数として、変位の連続条件(3)をこれらの未知数で表わし、 $3(n-1)$ 元の連立方程式の解析に帰着させる。紙面の都合より、式(3-3)のみに対する式を示せば、

1) S. Srinivas and A. K. Rao, Bending, vibration and buckling of simply supported thick orthotropic rectangular plates and laminates. Int. J. Solids St. 1970, Vol. 6.

2) 倉田, 園田, 堀川 「鋼・コンクリート合成板の接合面に作用する応力の一計算」 昭和51年, 関西支部。

$$\begin{aligned}
& \frac{\alpha_m}{\delta} X_i \cdot \left[(1-\nu_i) \left(\frac{1}{D P_i} - \frac{1}{D M_i} \right) \right] K_i + \frac{\beta_m}{\delta} Y_i \cdot \left[(1-\nu_i) \left(\frac{1}{D P_i} - \frac{1}{D M_i} \right) \right] K_i + Z_i \cdot \left[(1-\nu_i) \left(\frac{\alpha S_i}{D M_i} - \frac{\ln S_i}{D P_i} \right) \right] K_i \\
& + \frac{\alpha_m}{\delta} X_{i+1} \cdot \left\{ -K_i \left[1 + (1-\nu_i) \left(\frac{1}{D P_i} + \frac{1}{D M_i} \right) \right] + K_{i+1} \left[1 + (1-\nu_{i+1}) \left(\frac{1}{D P_{i+1}} + \frac{1}{D M_{i+1}} \right) \right] \right\} + \frac{\beta_m}{\delta} Y_{i+1} \cdot \left\{ -K_i \left[1 + (1-\nu_i) \left(\frac{1}{D P_i} + \frac{1}{D M_i} \right) \right] \right. \\
& + K_{i+1} \left[1 + (1-\nu_{i+1}) \left(\frac{1}{D P_{i+1}} + \frac{1}{D M_{i+1}} \right) \right] \left. \right\} + Z_{i+1} \cdot \left\{ -K_i \left[(1-\nu_i) \left(\frac{\alpha S_i}{D M_i} + \frac{\ln S_i}{D P_i} \right) \right] - K_{i+1} \left[(1-\nu_{i+1}) \left(\frac{\alpha S_{i+1}}{D M_{i+1}} + \frac{\ln S_{i+1}}{D P_{i+1}} \right) \right] \right\} \\
& + \frac{\alpha_m}{\delta} X_{i+2} \left[(1-\nu_{i+1}) \left(\frac{1}{D M_{i+1}} - \frac{1}{D P_{i+1}} \right) \right] K_{i+1} + \frac{\beta_m}{\delta} Y_{i+2} \left[(1-\nu_{i+1}) \left(\frac{1}{D M_{i+1}} - \frac{1}{D P_{i+1}} \right) \right] K_{i+1} - Z_{i+2} \left[(1-\nu_{i+1}) \left(\frac{\ln S_{i+1}}{D P_{i+1}} - \frac{\alpha S_{i+1}}{D M_{i+1}} \right) \right] K_{i+1} \\
& = 0 \quad \text{--- (5)}
\end{aligned}$$

ここで $K_i = \frac{1}{2G_i}$, $S_i = \frac{\delta h_i}{2}$, $D P_i = S_i (\ln S_i - \alpha S_i) - 1$, $D M_i = S_i (\alpha S_i - \ln S_i) - 1$, $\ln S_i = \tanh S_i$, $\alpha S_i = \coth S_i$

X_i, Y_i, Z_i はそれぞれ x, y, z 軸方向の接合面に作用する応力

ここに、 X_i, Y_i, Z_i が求まれば、 $C_1 \sim C_6$ が決定されて、変位・応力を求めることができる。

3. 計算例

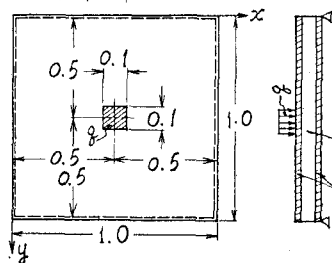


図-2

第1層目と第3層目を同一の鋼板とし、第2層目をコンクリート板とした3層($n=3$)よりなるサンドウィッチ板について数値計算を行った。荷重は図-2に示すような部分荷重とし、各諸元は表-1に示す通りである。

表-1

層	諸元	板厚 h/a	ヤング係数比	ポアソン比
第1層目・第3層目		0.002 ~0.008	7.0	0.3
第2層目		0.1	1.0	0.1667

以下の図-3, 4 において薄板理論によるものは細線で表わす。

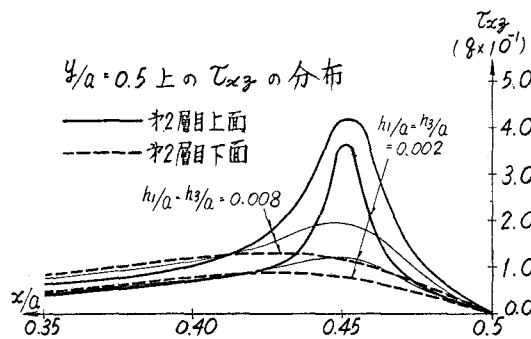


図-3

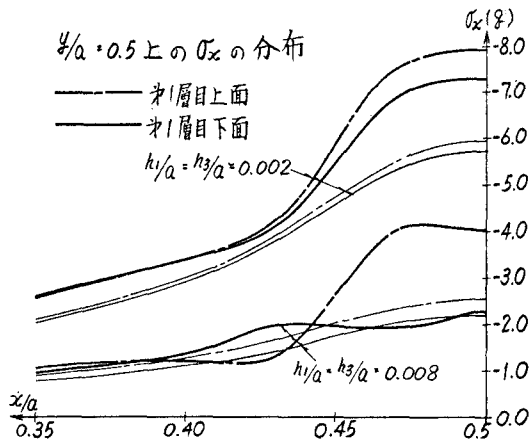


図-4

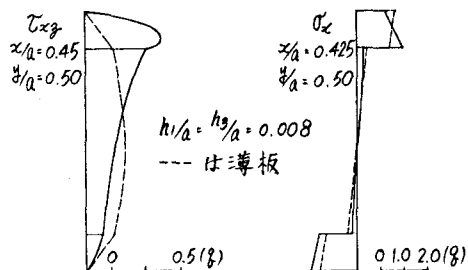


図-5 鉛直方向の応力分布

4. あとがき

本研究は、種々の境界を有する矩形板の解析にも適用できるものと思われる。また、上記数値計算より、薄板理論による結果と本研究による結果とは、応力の分布状態にかなりの相異が見られる。