

大阪市立大学 正員 園田 恵一郎
大阪市立大学 正員 塚川 裕志雄

1. はしがき； 従来、桁を有する床版は、剛支承を有する連続板として取扱うか、あるいは、桁の沈下を考慮した連続板の解析法がある。しかしながら、これらはいずれも薄板理論を適用したものであり、桁もしくは桁の近傍に作用する応力、変位等を求めるには不十分と思われる。

本研究においては、これらの問題に対して変位ポテンシャルに基づく厚板理論を用いて、三次元応力解析を行なう。板は図-1に示すように、相対2辺単純支持、他の2辺が自由であり、曲げに対する境界条件は Reissner 理論によるものを採用した。なお、板と桁は、水平および鉛直変位が完全に連続しており、桁のねじり剛性を無視し、桁に作用する鉛直荷重はフランジ上で一様分布荷重とした。

2. 理論式および数値計算例；

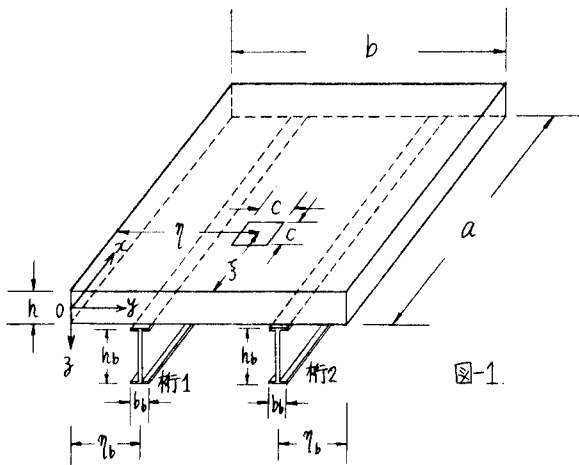


図-1.

床版の中央面内に、それぞれ x, y 軸、下方に z 軸をとる。

図-1における各諸元は以下のものとした。

$$b/a=1.0, \quad h/a=0.1, \quad c/a=0.1, \quad b_0/a=0.01,$$

$$\nu=0.3, \quad \eta_0/b_0=0.25. \quad \nu: \text{ポアソン比}$$

床版の境界条件は、次のとおりである。

i) 自由辺 ($y=0, b$)

$$M_y=0, \quad M_{xy}=0, \quad Q_y=0, \quad N_y=0, \quad N_{xy}=0 \quad \text{--- (1)}$$

ii) 単純支持辺 ($x=0, a$)

$$w=0, \quad \beta_y=0, \quad M_x=0, \quad v_m=0, \quad N_x=0 \quad \text{--- (2)}$$

ここで、 β_y : セン断変形を考慮した y 方向のたわみ角

v_m : 中央面内での y 方向の水平変位 である。

なお、桁は $x=0, a$ で単純支持されている。

解は、厚板理論による特解と、Reissner 理論による補足解から構成されている。1) 特解: 三次元弾性論における Galerkin vector G_z と Boussinesq の関数 Q_z は、次のように示される。

$$\Delta \Delta G_z = 0, \quad \Delta Q_z = 0 \quad \text{--- (3)} \quad \text{ここで、} \Delta: \text{3次元ラプラスアン。}$$

変位と上述したポテンシャル G_z, Q_z との関係式は、

$$2G_z u = -\frac{\partial G_z}{\partial x}, \quad 2G_z v = -\frac{\partial G_z}{\partial y}, \quad 2G_z w = 2(1-\nu) \Delta G_z - \frac{\partial^2 Q_z}{\partial z^2} \quad \text{--- (4)}$$

式(4)と Hooke の法則より、応力、断面力等が得られる。

2) 補足解: Reissner 理論の曲げ問題における w^d, ψ^d , 引張り問題における ϕ^d は、

$$\Delta \Delta w^d = 0, \quad \psi^d - \frac{h^2}{10} \Delta \psi^d = 0, \quad \Delta \Delta \phi^d = 0 \quad \text{--- (5)} \quad \Delta: \text{2次元ラプラスアン。}$$

断面力とこれらの関数との関係は次のように示される。

$$\left. \begin{aligned} M_x^d &= -D \left(\frac{\partial^2 w^d}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w^d}{\partial y^2} \right) + \frac{h^2}{5(1+\nu)} \left(\frac{\partial Q_z^d}{\partial x} + \nu \frac{\partial Q_z^d}{\partial y} \right), & M_{xy}^d &= -(1-\nu) D \frac{\partial^2 w^d}{\partial x \partial y} + \frac{h^2}{10} \left(\frac{\partial Q_z^d}{\partial y} + \frac{\partial Q_z^d}{\partial x} \right) \\ Q_x^d &= \frac{\partial \psi^d}{\partial y} - D \frac{\partial w^d}{\partial x}, & N_x^d &= (1-\nu) h \left\{ 2 \frac{\partial \phi^d}{\partial x} + \nu \frac{\partial \phi^d}{\partial y} - \frac{\partial^2 \phi^d}{\partial x^2} \right\} \end{aligned} \right\} \quad \text{--- (6)}$$

式(3)における G_z, Q_z を x, y 方向に関して三角級数で、 z 方向に e のべき乗で展開し、又式(5)の w^d, ψ^d, ϕ^d は x 方向に三角級数で、 y 方向に e のべき乗で展開する。特解と補足解を重ね合わせれば、断面力の式は以下のようにならされる。

(紙面の都合上、 y 方向の膜力、曲げモーメントの式のみを示す。)

$$N_y = \sum_m \sum_n \left[C_1 \cdot \text{sh} \zeta + C_4 \left(\zeta \cdot \text{ch} \zeta + \frac{2\nu}{\beta_n^2} \cdot \text{sh} \zeta \right) - \frac{2 \cdot \sigma_m}{\beta_n^2} \cdot C_6 \cdot \text{sh} \zeta \right] \cdot z \beta_n^2 \cdot \sin \beta_n y \cdot \sin \alpha_m x$$

$$+ (1-\nu) \cdot h \cdot \sum_m \left[G_m \cdot \text{ch} \alpha_m y + H_m \cdot \text{sh} \alpha_m y + I_m \left(\alpha_m y \cdot \text{sh} \alpha_m y + \frac{2}{1+\nu} \cdot \text{ch} \alpha_m y \right) + J_m \left(\alpha_m y \cdot \text{ch} \alpha_m y + \frac{2}{1+\nu} \cdot \text{sh} \alpha_m y \right) \right] \cdot \alpha_m^2 \cdot \sin \alpha_m x$$

$$M_y = \sum_m \sum_n \left[C_2 \left(\zeta \cdot \text{ch} \zeta - \text{sh} \zeta \right) + C_3 \cdot \left\{ \zeta^2 \cdot \text{sh} \zeta + \left(\frac{2\nu}{\beta_n^2} - 1 \right) \cdot \left(\zeta \cdot \text{ch} \zeta - \text{sh} \zeta \right) - \frac{2 \cdot \sigma_m}{\beta_n^2} \cdot C_5 \cdot \left(\zeta \cdot \text{ch} \zeta - \text{sh} \zeta \right) \right\} \cdot \frac{2 \beta_n^2}{\zeta} \cdot \sin \beta_n y \cdot \sin \alpha_m x \right.$$

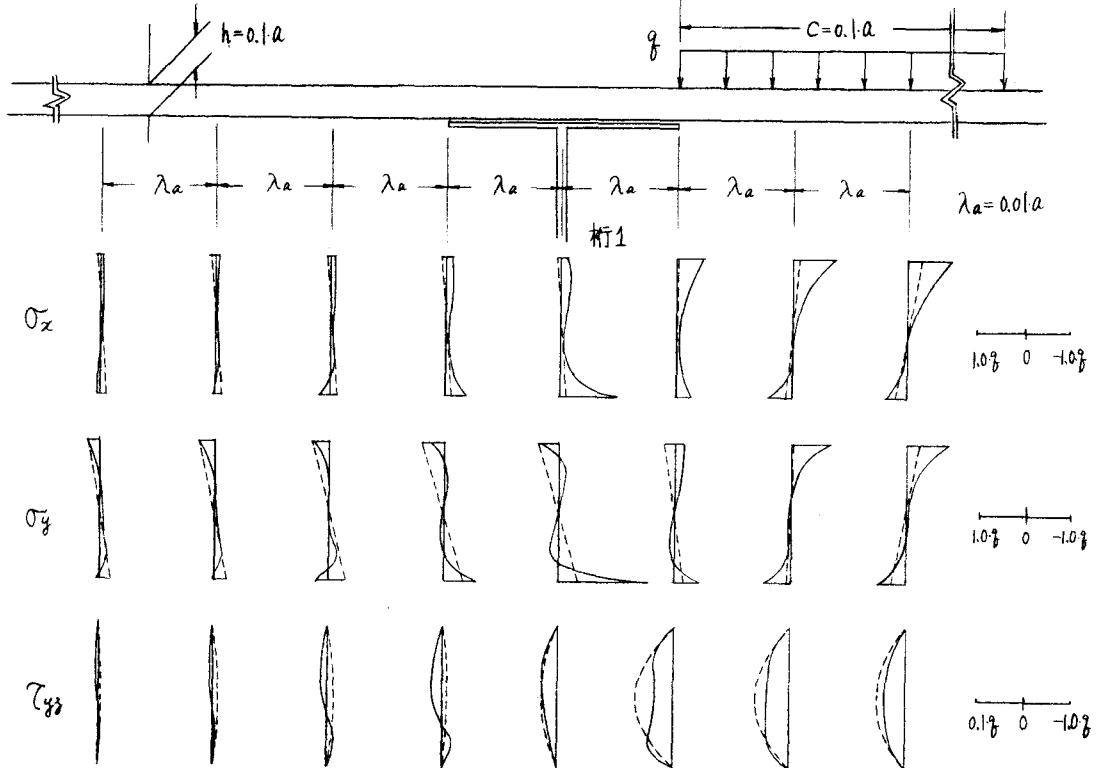
$$- (1-\nu) \cdot \sum_m \left[A_m \cdot \text{ch} \alpha_m y + B_m \cdot \text{sh} \alpha_m y + C_m \left(\alpha_m y \cdot \text{sh} \alpha_m y + \frac{2}{1+\nu} \cdot \text{ch} \alpha_m y \right) + D_m \left(\alpha_m y \cdot \text{ch} \alpha_m y + \frac{2}{1+\nu} \cdot \text{sh} \alpha_m y \right) \right] \cdot \alpha_m^2 \cdot \sin \alpha_m x$$

$$\left. - \frac{h^2}{5} \cdot \sum_m \left[2 C_m \cdot \text{ch} \alpha_m y + 2 D_m \cdot \text{sh} \alpha_m y - \frac{10}{\alpha_m^2} \cdot \left(E_m \cdot \text{ch} \alpha_m y + F_m \cdot \text{sh} \alpha_m y \right) \right] \cdot \alpha_m^4 \cdot \sin \alpha_m x \right]$$

$\therefore$ $\alpha_m = \frac{m\pi}{a}$, $\beta_n = \frac{n\pi}{b}$, $\zeta = \alpha_m^2 + \beta_n^2$, $K_m^2 = \alpha_m^2 + \frac{10}{h^2}$, $\zeta = \frac{K_m^2}{2}$, $\text{ch} \zeta = \cosh \zeta$, $\text{sh} \zeta = \sinh \zeta$.
 $A_m, B_m, C_m, D_m, E_m, F_m$; 曲げ問題における境界条件より決定される定数,
 G_m, H_m, I_m, J_m ; 引張り問題における境界条件より決定される定数,
 $C_1, C_2, \dots, C_6$; 板の上・下面の境界条件より決定される定数.

連続条件式は次のように表わされる。 $w_p^L = w_b^R$, $u_p^L = u_b^R$ ——— (7) $\therefore$ u, l はそれぞれ上・下面を p, b はそれぞれ板および桁を示している。しかし、以上の各境界条件式と連続条件式を同時に満足させることは困難であるから、境界条件式を用いて、補足解より導入される未定定数を外荷重 p と不静定反力 Z_j, X_j (桁と板との接合面に働く直応力と接線応力) で表わし、さらに式(7)を用いて、不静定反力を解く。不静定反力 Z_j, X_j が決定されると、未定定数 $A_m, \dots, J_m$ も又決定されることになる。

図-2. 桁1の近傍に載荷された場合の桁近傍における応力分布図 ($EI/b \cdot a = 40.0$)



———— 厚板理論, ----- 薄板理論

3 おとがき; 桁上における応力の集中度は、他の断面に比較して顕著であり、分布形も異なっている。又薄板理論によるものとかなり相異がみられる。

園田・堀川「桁を有する床版の3次元応力解析」昭和51年度 関西支部講演