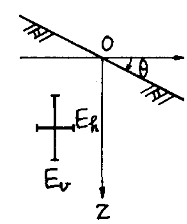
I−16　　内部に集中力を受ける半無限異方性体の解析解

大阪工業大学　　正員　岡村宏一
東洋技研コンサルタント(株)　正員　○島田　功

1. まえがき：　3次元異方性体の研究例として，特に水平な自由面を持つ半無限体の表面荷重による応力伝播に関しては，Michell[2]が，鉛直と水平方向とで弾性定数の異なる軸対称異方性体の問題を解いている。また，その特別な場合として，Wolf[3]の解（ポアソン比が 0），Barden[4]の解（Michellの解をもとに，水平応力を近似的に求めた。）がある。　ところで，筆者は，上述の水平な自由面をもつ半無限異方性体の内部に集中力が作用する問題の解析解を求めた。[1]　この解は，荷重作用深さ $(d_o)=0$ とすれば，Michellらの求めた表面荷重の解となり，また，$d_o=\infty$ とすれば，無限体の解となる。　さて，本文では，図−1 に示すような，異方性主軸と斜交する自由面を持つ半無限軸対称異方性体の集中力問題を鏡像の原理により，解析したものであり，$\theta=0$ とすれば，水平な自由面の解となる。


図−1

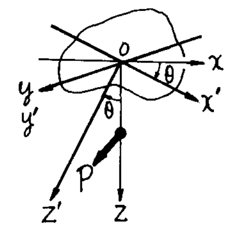
2. 基礎式：　z軸と直角な方向で性質の異なる軸対称異方性体の応力−ひずみマトリクスは，5つの弾性定数（a_{11}，a_{13}，a_{33}，a_{44}，a_{55}）により，次のように表わされる。

$$\left.\begin{aligned}\sigma_x &= a_{11}e - 2a_{44} + (a_{13}-a_{11})\varepsilon_z, & \tau_{xy} &= a_{44}\gamma_{xy}\\ \sigma_y &= a_{11}e - 2a_{44} + (a_{13}-a_{11})\varepsilon_z, & \tau_{yz} &= a_{55}\gamma_{yz}\\ \sigma_z &= a_{13}e - (a_{33}-a_{13})\varepsilon_z, & \tau_{zx} &= a_{55}\gamma_{zx}\end{aligned}\right\} \text{———} (1)$$

ただし，$e=\varepsilon_x+\varepsilon_y+\varepsilon_z$

式(1)をつりあい方程式に代入し，微分操作を行なうことにより，次の軸対称異方体の基礎式を得る。

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\gamma_i\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\xi_i=0 \qquad (i=1,2,3) \text{ ———} (2)$$


図−2

ただし，　$\xi_1=e+q_1\dfrac{\partial w}{\partial z}$，$\xi_2=e+q_2\dfrac{\partial w}{\partial z}$，$\xi_3=\dfrac{\partial u}{\partial y}-\dfrac{\partial v}{\partial x}$

$$\gamma_1=\{a_{55}+p_1(a_{13}+a_{55})\}/a_{11},\quad \gamma_2=\{a_{55}+p_2(a_{13}+a_{55})\}/a_{11},\quad \gamma_3=a_{55}/a_{44}$$

$$q_1=(a_{55}+a_{13}-a_{11}+p_1a_{55})/a_{11},\quad q=(a_{55}+a_{13}-a_{11}+p_2a_{55})/a_{11}$$

$$p_1,p_2=-1+\frac{1}{2a_{55}(a_{13}+a_{55})}\left\{a_{11}a_{33}-a_{13}^2\pm\sqrt{(a_{11}a_{33}-a_{13}^2)^2-4(a_{11}a_{33}-a_{13}^2)(a_{13}+a_{55})a_{55}}\right\}$$

各変位成分は次式のように与えられる。

$$\left.\begin{aligned}u&=\frac{1}{q_1-q_2}\left\{\frac{1+q_2}{\gamma_1}\frac{\partial}{\partial x}\iint\xi_1\,dz\,dz-\frac{1+q_1}{\gamma_2}\frac{\partial}{\partial x}\iint\xi_2\,dz\,dz\right\}-\frac{1}{\gamma_3}\frac{\partial}{\partial y}\iint\xi_3\,dz\,dz\\ v&=\frac{1}{q_1-q_2}\left\{\frac{1+q_2}{\gamma_1}\frac{\partial}{\partial y}\iint\xi_1\,dz\,dz-\frac{1+q_1}{\gamma_2}\frac{\partial}{\partial y}\iint\xi_2\,dz\,dz\right\}-\frac{1}{\gamma_3}\frac{\partial}{\partial x}\iint\xi_3\,dz\,dz\\ w&=\frac{1}{q_1-q_2}\left\{\int\xi_1\,dz-\int\xi_2\,dz\right\}\end{aligned}\right\} \text{———} (3)$$

1) 島田；内部に集中力を受ける半無限異方性体の解析解，土木学会関西支部講演概要集（1976）
2) Michell, J.H.; The stress Distribution in an Aelotropic Solid with Infinite Boundary Plane, Proc. London Math Soc., Vol. 32 (1900)
3) Wolf, K.; Ausbreitung der Kraft in der halbebene und in halbraum bei anisotropen Material, Z.A.M.M., Vol. 15 (1935)
4) Barden, L.; Stresses and Displacements in a Cross-anisotropic Solid, Giotechnique, Vol. 13, No. 3 (1963)

3．境界条件；異方性主軸と斜交する自由面を持つ，図-2のような，半無限体表面の境界条件（$\sigma_{z'}$，$\tau_{y'z'}$，$\tau_{z'x'}$）$_{z'=0}=0$ を，x-y-z 座標系で表現すると，

$$(\sigma_z-\tau_{zx}\tan\theta)_{z=x\tan\theta}=0,\quad (\tau_{zx}-\sigma_x\tan\theta)_{z=x\tan\theta}=0,\quad (\tau_{yz}-\tau_{xy}\tan\theta)_{z=x\tan\theta}=0 \qquad (4)$$

式(4)を $(\xi_i)_{z=x\tan\theta}$ $(i=1,2,3)$ で表現すれば，

$$\left.\begin{aligned}
&f_1\xi_1+f_2\xi_2+g_1\frac{\partial}{\partial x}\int\xi_1 dz+g_2\frac{\partial}{\partial x}\int\xi_2 dz+g_3\frac{\partial}{\partial y}\int\xi_3 dz=0\\
&2g_1\frac{\partial\xi_1}{\partial x}+(f_1+\bar f_1)\frac{\partial\xi_1}{\partial z}+2g_2\frac{\partial\xi_2}{\partial x}+(f_2+\bar f_2)\frac{\partial\xi_2}{\partial z}+2g_3\frac{\partial\xi_3}{\partial y}+2\bar g_1\frac{\partial^2}{\partial y^2}\int\xi_1 dz+2\bar g_2\frac{\partial^2}{\partial y^2}\int\xi_2 dz+2\bar g_3\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\int\xi_3 dz=0\\
&2(g_1-h_1)\frac{\partial\xi_1}{\partial y}+2(g_2-h_2)\frac{\partial\xi_2}{\partial y}+a_{55}\frac{\partial\xi_3}{\partial z}-2g_3\frac{\partial\xi_3}{\partial x}-2\bar g_1\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\int\xi_1 dz-2\bar g_2\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\int\xi_2 dz-g_3\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}-\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\int\xi_3 dz=0
\end{aligned}\right\}\quad(5)$$

ただし，$f_1=(a_{13}\gamma_2-a_{33}+a_{13})/(\gamma_2-\gamma_1)$，　$f_2=-(a_{13}\gamma_1-a_{33}+a_{13})/(\gamma_2-\gamma_1)$

$g_1=(1+\gamma_2+\gamma_1)a_{55}\tan\theta/\{(\gamma_2-\gamma_1)\gamma_1\}$，$g_2=-(1+\gamma_1+\gamma_2)a_{55}\tan\theta/\{(\gamma_2-\gamma_1)\gamma_2\}$，$g_3=a_{55}\tan\theta/\gamma_3$

$h_1=\{(a_{11}-a_{44})\gamma_2-(a_{13}-a_{11}+a_{44})\}\tan\theta/(\gamma_2-\gamma_1)$，$h_2=-\{(a_{11}-a_{44})\gamma_1-(a_{13}-a_{11}+a_{44})\}\tan\theta/(\gamma_2-\gamma_1)$

$\bar f_1=\{a_{11}\gamma_2-(a_{13}-a_{11})\}\tan^2\theta/(\gamma_2-\gamma_1)$，　$\bar f_2=\{a_{11}\gamma_1-(a_{13}-a_{11})\}\tan^2\theta/(\gamma_2-\gamma_1)$

$\bar g_1=(1+\gamma_2)a_{44}\tan^2\theta/\{(\gamma_2-\gamma_1)\gamma_1\}$，$\bar g_2=-(1+\gamma_1)a_{44}\tan^2\theta/\{(\gamma_2-\gamma_1)\gamma_2\}$，$\bar g_3=-a_{44}\tan^2\theta/\gamma_3$

4．集中力問題の解；点（$x=b$，$y=c$，$z=d$）で特異点を持ち，無限遠で零となる基礎式(2)の解は，一般に次式のように与えられる。

$$\xi_i=\left(A_i\frac{\partial}{\partial x}+B_i\frac{\partial}{\partial y}+C_i\frac{\partial}{\partial z}\right)\frac{1}{R_i}\quad(i=1,2,3) \qquad (6)$$

ただし，A_i，B_i，C_i；積分定数，$R_i^2=(x-b)^2+(y-c)^2+(z-d)^2/\gamma_i$

ところで，$z=d_0$ に集中力 P（P の方向余弦を (l,m,n)）が作用する無限体の解では，式(5)の積分定数が次のようになる。（$b=c=0$，$d=d_0$）

$$\left.\begin{aligned}
&A_1^0=-\frac{Pl}{4\pi}\times\frac{\sqrt{\gamma_1}\gamma_2}{f_1\gamma_1+f_2\gamma_2},\quad A_2^0=-\frac{Pl}{4\pi}\times\frac{\sqrt{\gamma_2}\gamma_1}{f_1\gamma_2+f_2\gamma_1},\quad A_3^0=\frac{Pm}{4\pi}\times\frac{\sqrt{\gamma_3}}{a_{55}},\quad B_1^0=-\frac{Pm}{4\pi}\frac{\sqrt{\gamma_1}\gamma_2}{f_1\gamma_2+f_2\gamma_1}\\
&B_2^0=-\frac{Pm}{4\pi}\times\frac{\sqrt{\gamma_2}\gamma_1}{f_1\gamma_2+f_2\gamma_1},\quad B_3^0=\frac{Pl}{4\pi}\times\frac{\sqrt{\gamma_3}}{a_{55}},\quad C_1^0=\frac{Pn}{4\pi}\times\frac{\sqrt{\gamma_1}(1+\gamma_1)}{a_{33}},\quad C_2^0=\frac{Pn}{4\pi}\times\frac{\sqrt{\gamma_2}(1+\gamma_2)}{a_{33}},\quad C_3^0=0
\end{aligned}\right\}\quad(7)$$

さて，本問題の解は，上に与えた無限体の集中力問題の解を特解とし，$z=x\tan\theta$ で，自由面の境界条件式(5)を満足するように境界調整することにより求まる。また，自由面より上の部分では，特異点を任意に採ることができるが，$z=x\tan\theta$（自由面）で，特解と同種の関数を与える特異点（図-3参照）は，次のようになる。

$$b_i^j=d_0\tan\theta\times(\gamma_i+\sqrt{\gamma_i\gamma_j})/\{\gamma_i(\gamma_j+\tan^2\theta)\},\quad d_i^j=-d_0(\sqrt{\gamma_i\gamma_j}-\tan^2\theta)/(\gamma_j+\tan^2\theta)\quad(i,j=1,2,3) \qquad (8)$$

ただし，$i\neq j$ では，$y=0$，$z=x\tan\theta$ において特解と同種の関数を与える。

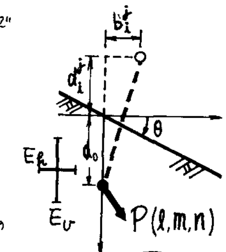


図-3

これらの点で，特異点を持つ解（式(6)）を特解と重ね合せ，式(5)の条件を満足するように積分定数を決定することになる。特に，水平な自由面（$\theta=0$）の場合は，図-4に示す3つの特異点を持つ解を重ね合わすことにより簡単に求まる。その積分定数は次式となる。

$$A_i^j=\alpha_i^j\cdot A_j^0,\quad B_i^j=\alpha_i^j B_j^0,\quad C_i^j=\beta_i^j C_j^0\quad(i,j=1,2,3) \qquad (9)$$

ただし，$\alpha_1^1=\dfrac{\gamma_1 d_1+\gamma_2 d_0}{\gamma_2 d_0-\gamma_1 d_1}$，$\alpha_1^2=-\dfrac{f_2}{f_1}\times\dfrac{2\gamma_1 d_0}{\gamma_1 d_0-\gamma_2 d_2}$，$\alpha_2^1=-\dfrac{f_1}{f_2}\times\dfrac{2\gamma_2 d_0}{\gamma_2 d_0-\gamma_1 d_1}$

$\alpha_2^2=\dfrac{\gamma_2 d_2+\gamma_1 d_0}{\gamma_1 d_0-\gamma_2 d_2}$，$\alpha_3^3=1$，$\beta_1^1=-\dfrac{d_1+d_0}{d_1-d_0}$，$\beta_1^2=\dfrac{f_2\gamma_1}{f_1\gamma_2}\times\dfrac{2d_0}{d_2-d_0}$，$\beta_2^1=-\dfrac{d_2+d_0}{d_2-d_0}$，

$\beta_2^2=\dfrac{f_1\gamma_2}{f_2\gamma_1}\times\dfrac{2d_0}{d_1-d_0}$，他の $\alpha_i^j=\beta_i^j=0$，　上述のようにして，式(6)の積分定数を決定すると，式(1),(3)を用いて変位および応力成分を求めることができる。紙面の都合により，解析結果は省略する。

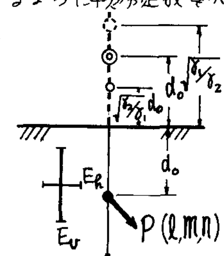


図-4