

室蘭工業大学 正員 松岡健一
北海道大学 正員 能町純雄

1. はじめに 剛体で圧縮される弾性体の問題は、半無限体では Sneddon が円柱座標で Hankel 変換を用いて、剛円柱および円錐で圧縮される場合の問題を解析している¹⁾。これは軸対称問題であるが、牟岐はこれを非軸対称問題に拡張し、傾斜した底面をもつ円柱で圧縮された半無限体を解析している²⁾。半無限領域以外の場合には3次元応力問題としても解析解を与えることは困難で、本村も近似的に表面の接触応力を階段状に分割し、境界変位の条件を満たす方法で解析している³⁾。剛体で圧縮された多層弾性体の3次元応力問題はやはり厳密解を求めることは不可能と考えられるので、ここでは一つの方法として剛体で圧縮される半無限体の解としてえられる関数と、多層体とあることにより生ずる差を部分的に適当な関数で置きかえ、これらを組合せて解析する。

2. 無限厚板の一般解 無限厚板を図-1に示すように、厚さの方向に z 、これに直角方向に r, θ をとり、それぞれの変位成分を w, u, v とする。この厚板の一般解は、有限 Fourier-Hankel 変換を用いると⁴⁾

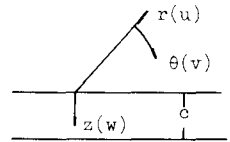


図-1

$$u = \frac{1}{\sqrt{z}} \sum_m e_m \int_0^\infty \{A_{m\pi z} J_{m+1}(\pi r) + B_{m\pi z} J_{m-1}(\pi r)\} d\pi \cos m\theta, \quad (1)$$

$$v = \frac{1}{\sqrt{z}} \sum_m e_m \int_0^\infty \{A_{m\pi z} J_{m+1}(\pi r) - B_{m\pi z} J_{m-1}(\pi r)\} d\pi \sin m\theta, \quad (2)$$

$$w = \frac{1}{\sqrt{z}} \sum_m e_m \int_0^\infty J_m(\pi r) \left\{ Q^{(k)}(\pi z) D_{m\pi k} + \frac{\mu + \lambda}{(2\mu + \lambda) 2\mu} P^{(k)}(\pi z) (\gamma_{m\pi k} - \delta_{m\pi k} + 2\mu D_{m\pi k}) \right\} d\pi \cos m\theta, \quad (3)$$

に於て $e_0 = 1/2$, $e_m = 1 (m \neq 0)$, $m = 0, 1, \dots$ であり、 $J_m(\pi r)$ は第 m 種の Bessel 関数、 μ, λ は Lamé の定数

$$A_{m\pi z} = -\frac{z}{k=1} \left[\frac{1}{(2\mu + \lambda) 2\mu} \phi^{(k)}(\pi z) \{ (2\mu + \lambda) \gamma_{m\pi k} + (\mu + \lambda) \delta_{m\pi k} - \mu \lambda D_{m\pi k} \} + \frac{\mu + \lambda}{2\mu (2\mu + \lambda)} \{ \phi^{(k)}(\pi z) - \psi^{(k)}(\pi z) \} (\gamma_{m\pi k} - \delta_{m\pi k} + 2\mu D_{m\pi k}) \right], \quad (4)$$

$$B_{m\pi z} = -\frac{z}{k=1} \left[\frac{1}{2\mu (2\mu + \lambda)} \phi^{(k)}(\pi z) \{ (\mu + \lambda) \gamma_{m\pi k} + (2\mu + \lambda) \delta_{m\pi k} + \mu \lambda D_{m\pi k} \} + \frac{\mu + \lambda}{4\mu (2\mu + \lambda)} \{ \phi^{(k)}(\pi z) - \psi^{(k)}(\pi z) \} (\gamma_{m\pi k} - \delta_{m\pi k} + 2\mu D_{m\pi k}) \right], \quad (5)$$

$$\text{また } \begin{cases} D_{m\pi 1} = \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \cos m\theta J_m(\pi r) dr d\theta, & (6) \end{cases} \begin{cases} \gamma_{m\pi 1} = \int_0^\infty \int_0^{2\pi} r J_m(\pi r) dr d\theta / \pi, & (7) \end{cases} \begin{cases} \delta_{m\pi 1} = \int_0^\infty \int_0^{2\pi} r J_{m-1}(\pi r) dr d\theta / \pi, & (8) \end{cases}$$

$$\gamma_{m\pi 2} = \int_0^{2\pi} \{ \tau_{12} \cos m\theta + \tau_{22} \sin m\theta \} d\theta, \quad (9) \quad \delta_{m\pi 2} = \int_0^{2\pi} \{ \tau_{12} \cos m\theta - \tau_{22} \sin m\theta \} d\theta, \quad (10)$$

$$Q^{(1)}(\pi z) = \sinh \pi z \cdot \delta_c, \quad Q^{(2)}(\pi z) = \sinh \pi z \cdot \delta_c, \quad \phi^{(1)}(\pi z) = \cosh \pi z \cdot \delta_c, \quad \phi^{(2)}(\pi z) = \cosh \pi z \cdot \delta_c, \quad \delta_c = 1/\sinh \pi c, \quad (11)$$

$$P^{(k)}(\pi z) = \pi z \phi^{(k)}(\pi z) - \pi c Q^{(k)}(\pi z) \phi^{(k)}(\pi c), \quad \psi^{(k)}(\pi z) = \pi z \phi^{(k)}(\pi z) - \pi c \phi^{(k)}(\pi z) \phi^{(k)}(\pi c), \quad k = 1, 2$$

3. 境界の変位および応力の遷移行列表示と多層体の解法 式(1)~(5)を変形して境界の変位および応力の遷移行列表示を行なうことができる。行列は境界のせん断力の有無により式が異なるがここでは多層体としたとき各層境界にはせん断力が作用するが、 n 層表面ではせん断力が作用しない場合のものを示す。

$$\begin{Bmatrix} E_{m\pi 1} \\ E_{m\pi 2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} A_{m\pi z} - B_{m\pi z} \end{Bmatrix}_{z=0}, \quad (12) \quad \begin{Bmatrix} E_{m\pi 1} \\ E_{m\pi 2} \end{Bmatrix} = \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \begin{Bmatrix} \gamma_{m\pi 1} \\ \delta_{m\pi 1} \end{Bmatrix} J_m(\pi r) \cos m\theta dr d\theta, \quad (13) \quad \alpha_{m\pi k} = \gamma_{m\pi k} - \delta_{m\pi k}, \quad (14)$$

また式(11)から $\phi^{(1)}(\pi c) = -\phi^{(2)}(0)$, $\phi^{(2)}(\pi c) = -\phi^{(1)}(0)$, $\psi^{(1)}(\pi c) = -\psi^{(2)}(0)$, $\psi^{(2)}(\pi c) = -\psi^{(1)}(0)$ であるから、これらを簡単に次のようにおく $\phi_k = \phi^{(k)}(0)$, $\psi_k = \psi^{(k)}(0)$, $\mp_k = \phi_k + \psi_k$, $\chi_k = \phi_k - \psi_k$ (15)

$$\text{とすれば } D_c = K_d \cdot D_0, \quad (16) \quad D_c = \{D_{m\pi 2}, E_{m\pi 2}, \alpha_{m\pi 2}, E_{m\pi 1}\}^T, \quad D_0 = \{D_{m\pi 1}, E_{m\pi 1}, \alpha_{m\pi 1}, E_{m\pi 2}\}^T, \quad (17)$$

$$K_d = \begin{bmatrix} \phi_2 + \frac{\mu + \lambda}{2\mu + \lambda} (\phi_2 \psi_1 - \phi_1 \psi_2) & -\frac{\lambda}{2\mu + \lambda} \phi_2 + \frac{\mu + \lambda}{2\mu + \lambda} \psi_2 & \frac{\mu + \lambda}{2\mu (2\mu + \lambda)} (\phi_2 \psi_1 - \phi_1 \psi_2) & \frac{1}{2\mu + \lambda} \phi_2 + \frac{\mu + \lambda}{2\mu (2\mu + \lambda)} \psi_2 \\ \frac{\mu}{2\mu + \lambda} \phi_2 (\phi_1^2 + \phi_2^2) - \frac{\mu + \lambda}{2\mu + \lambda} & \phi_2 \psi_1 - \frac{\mu + \lambda}{2\mu + \lambda} (\phi_2 \psi_1 - \phi_1 \psi_2) & \frac{2\mu + \lambda}{2\mu (2\mu + \lambda)} \phi_2 (\phi_1^2 + \phi_2^2) - \frac{\mu + \lambda}{2\mu + \lambda} & -\frac{\mu + \lambda}{2\mu (2\mu + \lambda)} (\phi_2 \psi_1 - \phi_1 \psi_2) \\ \times (2\phi_2 \phi_1 - \phi_1^2 \psi_2 + \phi_2^2 \psi_2) & & \times \frac{1}{2\mu} (2\phi_2 \phi_1 + \phi_2^2 \psi_2 - \phi_1^2 \psi_2) & \\ -\frac{2\mu (\mu + \lambda)}{2\mu + \lambda} (\phi_2 \psi_1 - \phi_1 \psi_2) & \frac{2\mu (\mu + \lambda)}{2\mu + \lambda} \mp_2 & \phi_2 \psi_1 - \frac{\mu + \lambda}{2\mu + \lambda} (\phi_2 \psi_1 - \phi_1 \psi_2) & \frac{\lambda}{2\mu + \lambda} \phi_2 - \frac{\mu + \lambda}{2\mu + \lambda} \psi_2 \\ \frac{2\mu (\mu + \lambda)}{2\mu + \lambda} \{ \phi_2 (\phi_1^2 + \phi_2^2) & \frac{2\mu (\mu + \lambda)}{2\mu + \lambda} (\phi_2 \psi_1 - \phi_1 \psi_2) & -\frac{\mu}{2\mu + \lambda} \phi_2 (\phi_1^2 + \phi_2^2) + \frac{\mu + \lambda}{2\mu + \lambda} & \phi_2 \psi_1 + \frac{\mu + \lambda}{2\mu + \lambda} (\phi_2 \psi_1 - \phi_1 \psi_2) \\ + \phi_2 (2\phi_2 \psi_1 - \phi_1 \psi_2) \} & & \times (2\phi_2 \phi_1 - \phi_1^2 \psi_2 + \phi_2^2 \psi_2) & \end{bmatrix} \quad (18)$$

多層弾性体の解析は上で求めた変移行列を用いて各層境界の条件を満足するように重ね合わせて行なう、今各層を表面から順に番号をつけた層の境界値、弾性定数、変数等全て添字を付けて表わすこととし、第1層以下では各層境界で変位および応力が連続しているものとすれば

$$D_{c,i} = D_{c,i+1}, D_{c,i} = K_{c,i} D_{c,i} = K_{c,i} D_{c,i-1}, \therefore D_{c,n-1} = K_{c,n-1} \cdots K_{c,2} K_{c,1} D_{c,1} = K_{c,T} D_{c,1} \quad (19)$$

また層が半無限体であれば、 $R_d \cdot D_{c,n} = R_d \cdot D_{c,n-1} = R_d \cdot K_{c,T} D_{c,1} = 0, \quad (20)$

$$R_d = \frac{1}{2\mu_n \lambda_n} \begin{bmatrix} 2\mu_n(\mu_n + \lambda_n) \bar{\psi}_{1,n} & 0 & \lambda_n \phi_{1,n} - (\mu_n + \lambda_n) \psi_{1,n} & 1 \\ -\lambda_n \phi_{1,n} + (\mu_n + \lambda_n) \psi_{1,n} & 1 & \phi_{1,n} - (\mu_n + \lambda_n) / 2\mu_n \bar{\psi}_{1,n} & 0 \end{bmatrix} \quad (21)$$

式(20)により $D_{c,1}$ を決定するための2つの条件が与えられるが残りは表面の条件から与えられる。

4. 表面変位が与えられた場合の解析 表面にはせん断力が作用しないので $\alpha_{nT} = 0$ 、また表面の接触応力は表面変位の状態により異なるが、非軸対称の場合について既に発表した⁽⁵⁾で、ここでは軸対称の場合について述べる。この場合 r について 0 から a の間を任意の間隔で $r_1, r_2, \dots, r_{l-1}$ に分割し、接触応力 $(\sigma_z)_{z=0}$ と

$$(\sigma_z)_{z=0} = p_0 a / \sqrt{a^2 - r^2} + \sum_{i=1}^{l-1} S_i(r); \quad S_i(r) = \{ p_{i-1} \log r / r + p_i \log r / r_{i-1} \} \log r / r_{i-1}, \quad r_{i-1} < r < r_i \quad (22)$$

とすればこれは厳密な意味での連続性は保障されないが階段状のような不連続性はなくなる。したがって

$$E_{mT} = 2\pi p_0 \sin \alpha / \pi + 2\pi \sum_{i=1}^{l-1} p_i \left[\{ J_0(r/r_i) - J_0(r/r_{i-1}) \} / \log r / r_{i-1} + \{ J_0(r/r_{i+1}) - J_0(r/r_i) \} / \log r_{i+1} / r_i \right] / \pi^2 \quad (23)$$

式(20)から D_{mT} は E_{mT} を含むものとして与えられるがこれを $E_{DmT} = k_d E_{mT}$ とおき、 k_d は $\alpha \rightarrow 0$ では、

$-(2\mu + \lambda) / 2\mu(\mu + \lambda)$ になることがわかるので、表面変位はこれを用いて

$$\begin{aligned} w|_{z=0} &= \frac{1}{2\pi} \int_0^a E_{DmT} J_0(r/r) dr = k_d \int_0^a \left(p_0 \sin \alpha / \pi + \sum_{i=1}^{l-1} p_i \left[\frac{J_0(r/r_i) - J_0(r/r_{i-1})}{\log r / r_{i-1}} + \frac{J_0(r/r_{i+1}) - J_0(r/r_i)}{\log r_{i+1} / r_i} \right] \frac{1}{\pi^2} \right) J_0(r/r) dr \\ &= p_0 \left[\int_0^a \left\{ \frac{2\mu + \lambda}{2\mu(\mu + \lambda)} + k_d \right\} \frac{1}{\pi} \sin \alpha J_0(r/r) dr - \frac{2\mu + \lambda}{2\mu(\mu + \lambda)} \frac{\pi}{2} \right] + \sum_{i=1}^{l-1} p_i \int_0^a \left[\frac{J_0(r/r_i) - J_0(r/r_{i-1})}{\log r / r_{i-1}} \right. \\ &\quad \left. - \{ J_0(r/r_{i+1}) - J_0(r/r_i) \} / \log r_{i+1} / r_i \right] J_0(r/r) dr = w_0, \quad 0 < r < a \end{aligned} \quad (24)$$

式(24)が r_i ($i=1, 2, \dots, l-1$)、 a で成立するように $p_0, p_1, \dots, p_{l-1}$ を決定し、各係数を求め式(1)~(5)から各変位を求め、Hookeの法則より各応力成分を求めることができる。

5. 数値計算例 以上により層体の場合について計算した結果を示す。計算はポアソン比 0.25 とし、 $c_1/a = 0.5, 1.0, c_2/a = 1.0$ で、 $E_2/E_1 = 0.01, 100.0, E_3/E_1 = 0.01, 100.0$ の組合せたもの計8通りの計算を行なった。軸対称の場合であるから $m=0$ とはりすに対する積分は π/a を1区間として Gauss の8分法により $40\pi/a$ まで数値積分を行なった。図-2, 3はその一部で $c_1 = c_2 = a$ で $r=a$ における $\sigma_z, \gamma=0$ における σ_r の r 方向の分布を示した。その他の結果は発表当日に発表する。

尚、本計算は北海道大学大型計算機センターの FACOM-230-70 で行なったものである。

※ 参考文献

- 1) I. N. Sneddon: *Hankel Transforms*, pp. 45~46.
- 2) 宇崎 鹿雄: 機械学会論文誌, 21巻, 111号, pp. 767~773.
- 3) 木村 益: 土木学会論文報告集, No. 162, pp. 31~48.
- 4) 松岡健一・能町純雄: 土木学会論文報告集, No. 241, pp. 1~11.
- 5) 松岡健一・能町純雄: 皇工大研究報告, Vol. 8, No. 3, pp. 611~621.

