

1. まえがき

半無限弾性体中に埋め込まれた半無限円柱が、その端面に円形に部分分布した一様せん断荷重を受ける場合の非軸対称3次元応力問題を一般化されたNeuberの解に基づいて解析したので報告する。

2. 基本解と応力関数

釣合方程式の基本解として、一般化されたNeuberの解¹⁾を用いることにすると、変位ベクトル u は次のように表わされる。

$$2G\Delta u = -\text{grad } F + 4(1-\nu)\bar{\varepsilon} + 2\text{rot } \varphi \quad \dots\dots (1)$$

$$\text{ここで, } F = \bar{\Phi}_0 + R\bar{\varepsilon}, \quad \nabla^2 \bar{\Phi}_0 = \nabla^2 \bar{\varepsilon} = \nabla^2 \varphi = 0 \quad \dots\dots (2)$$

$$\bar{\varepsilon} = (\bar{\varepsilon}_1, \bar{\varepsilon}_2, \bar{\varepsilon}_3), \quad \varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3), \quad R = (r, 0, z).$$

また、 G および ν はそれぞれせん断弾性係数およびポアソン比を表わすものとする。

図-1に示した半無限円柱に関する応力関数は、 $z \rightarrow \infty$ で変位および応力が消失しなければならないことを考慮して、式(2)から次のように求められる。

$$\begin{aligned} \bar{\Phi}_{03} &= -\cos\theta \sum_{s=1}^{\infty} A_s e^{-a_s z} J_1(a_s r), \quad \bar{\Phi}_3 = -\cos\theta \sum_{s=1}^{\infty} G_s e^{-a_s z} J_1(a_s r), \\ \varphi_3 &= \sin\theta \sum_{s=1}^{\infty} B_s e^{-a_s z} J_1(a_s r), \quad \bar{\Phi}_{01} = -\cos\theta \int_0^{\infty} D(\beta) I_1(\beta r) \cos\beta z d\beta, \\ \bar{\Phi}_1 &= -\cos\theta \int_0^{\infty} F(\beta) \{I_0(\beta r) + I_2(\beta r)\} \cos\beta z d\beta, \quad \dots\dots (3) \\ \bar{\Phi}_2 &= \sin\theta \int_0^{\infty} F(\beta) \{I_0(\beta r) - I_2(\beta r)\} \cos\beta z d\beta, \quad \varphi_1 = \sin\theta \int_0^{\infty} E(\beta) \{I_0(\beta r) + I_2(\beta r)\} \sin\beta z d\beta, \\ \varphi_2 &= \cos\theta \int_0^{\infty} E(\beta) \{I_0(\beta r) - I_2(\beta r)\} \sin\beta z d\beta. \end{aligned}$$

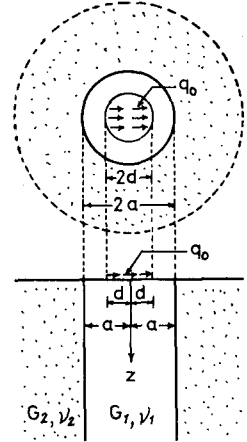


図-1 半無限弾性体中に埋め込まれた半無限円柱

式(3)における応力関数の r の範囲は $0 \leq r \leq a$ であり、助変数 a_s は境界条件によって定められる固有値である。また、半無限円柱を取り囲む半無限弾性体に関する応力関数は、 $z \rightarrow \infty$, $r \rightarrow \infty$ で変位と応力が消失しなければならないことを考慮して、式(2)から次のように求められる。

$$\begin{aligned} \bar{\Phi}_{03} &= -\cos\theta \sum_{s=1}^{\infty} \{A'_s J_1(r_s r) + H_s Y_1(r_s r)\} e^{-r_s z}, \quad \bar{\Phi}_3 = -\cos\theta \sum_{s=1}^{\infty} \{G'_s J_1(r_s r) + L_s Y_1(r_s r)\} e^{-r_s z}, \\ \varphi_3 &= \sin\theta \sum_{s=1}^{\infty} \{B'_s J_1(r_s r) + M_s Y_1(r_s r)\} e^{-r_s z}, \quad \bar{\Phi}_{01} = -\cos\theta \int_0^{\infty} D(\beta) K_1(\beta r) \cos\beta z d\beta, \quad \dots\dots (4) \\ \bar{\Phi}_1 &= -\cos\theta \int_0^{\infty} F(\beta) \{K_0(\beta r) + K_2(\beta r)\} \cos\beta z d\beta, \quad \bar{\Phi}_2 = \sin\theta \int_0^{\infty} F(\beta) \{K_0(\beta r) - K_2(\beta r)\} \cos\beta z d\beta, \\ \varphi_1 &= \sin\theta \int_0^{\infty} E(\beta) \{K_0(\beta r) + K_2(\beta r)\} \sin\beta z d\beta, \quad \varphi_2 = \cos\theta \int_0^{\infty} E(\beta) \{K_0(\beta r) - K_2(\beta r)\} \sin\beta z d\beta. \end{aligned}$$

式(4)における応力関数の r の範囲は $a \leq r < \infty$ であり、助変数 r_s は境界条件によって定まる固有値である。

3. 境界条件

半無限円柱の端面および半無限弾性体の表面における境界条件は次のようである。

$$(Tr_{z1})_{z=0} = -g(r) \cos\theta, \quad (T\theta_{z1})_{z=0} = g(r) \sin\theta \quad \dots\dots (5, 7, 2), \quad (Tr_{z2})_{z=0} = 0,$$

$$(T\theta_{z2})_{z=0} = 0 \quad \dots\dots (6, 1, 2), \quad (\sigma_{z1})_{z=0} = 0, \quad (\sigma_{z2})_{z=0} = 0 \quad \dots\dots (7, 1, 2)$$

ここで、 $g(r)$ は半無限円柱の端面に作用する一様せん断荷重をBesselの級数に展開したものであり、 g_0 を荷重強度とすれば次のように表わされる。

$$q(r) = \sum_{s=1}^{\infty} a_s J_0(\lambda_s r), \quad \text{ここで} \quad a_s = \frac{q_0 d}{a} \cdot \frac{2 J_1(\lambda_s d/a)}{\lambda_s J_1^2(\lambda_s)}$$

上式の λ_s は $J_0(\lambda_s a) = J_0(\lambda_s) = 0$ を満足する第 s 番目の根とする。

また、半無限円柱と半無限弾性体とが一体となって拳動すると仮定すると、円柱と弾性体との接触面における境界条件は次のようである。

$$(u_{r1})_{r=a} = (u_{r2})_{r=a}, \quad (u_{\theta 1})_{r=a} = (u_{\theta 2})_{r=a}, \quad (u_{z1})_{r=a} = (u_{z2})_{r=a} \cdots \cdots (8 \cdot 1, 2, 3)$$

$$(\tau_{rz1})_{r=a} = (\tau_{rz2})_{r=a}, \quad (\sigma_{r1})_{r=a} = (\sigma_{r2})_{r=a}, \quad (\tau_{\theta r1})_{r=a} = (\tau_{\theta r2})_{r=a} \cdots \cdots (9 \cdot 1, 2, 3)$$

式 (5) ~ 式 (9) において、応力および変位に付した 1, 2 の添字は円柱の応力と変位を弾性体のそれらと識別するために付したものである。

境界条件 (5.1) および (5.2) より

$$B_s = a_s / d_s^2, \quad A_s = a_s / d_s^2 - (1 - 2\nu_1) G_s / d_s \cdots \cdots (10)$$

が得られる。ここで、 ν_1 は円柱のポアソン比を表わすものとする。

境界条件 (6.1) および (6.2) より

$$B'_s = 0, \quad A'_s = -(1 - 2\nu_2) G'_s / r'_s, \quad M_s = 0, \quad H_s = -(1 - 2\nu_2) L_s / r'_s \cdots \cdots (11)$$

が得られる。ここで、 ν_2 は弾性体のポアソン比を表わすものとする。また、解法の都合上

$$L_s = -J_1(r'_s a) G'_s / Y_1(r'_s a) \cdots \cdots (12)$$

と置くと、応力関数に最初に含まれていた 15 個の未知定数は、式 (10), (11) および式 (12) の関係により 8 個の未知定数に減少する。この残りの 8 個の未知定数は、境界条件 (7) ~ (9) により Fourier 積分展開あるいは Bessel の級数展開を用いて得られる 8 群の連立 1 次方程式より決定される。

ただし、助変数 r'_s は $r'_s = d_s / a$ とし、 d_s は a より十分大きな数で

$$J_1(d_s b/a) Y_1(d_s) - J_1(d_s) Y_1(d_s b/a) = 0$$

の超越方程式を満足する第 s 番目の根とする。

4. 数値計算例

計算例として、半無限円柱と半無限弾性体とのポアソン比および縦弾性係数が等しい場合、すなわち、 $\nu_1 = \nu_2 = 0.25$, $G_1 = G_2$, $d/a = 0.4$ の場合を取り扱った。この場合については、半無限弾性体の表面にせん断荷重が作用する応力問題と等価となり、年岐²⁾の研究がある。級数の項数は s について 30 項取り、 $0 \sim \infty$ の積分は $10^{-5} \sim 170$ の範囲を 999 等分割して、Simpson の $3/8$ 則により求めた。

得られた応力および変位は、十分に収束した値とはいえないが、応力について松岡および年岐の結果と比較すると、値の大きな所では、数値 2 桁一致しているようである。一例として図-2 に半無限円柱および半無限弾性体のせん断応力 τ_{rz} の分布を示した。

1) 秦 謹一：三次元応力問題の解法について、北海道大学工学部研究報告，第13号，pp. 13-44，昭30.12

2) 年岐 鹿雄：表面にせん断荷重を受ける半無限弾性体の三次元応力問題，機械学会論文集，第22巻119号，pp. 468-474，昭31.7

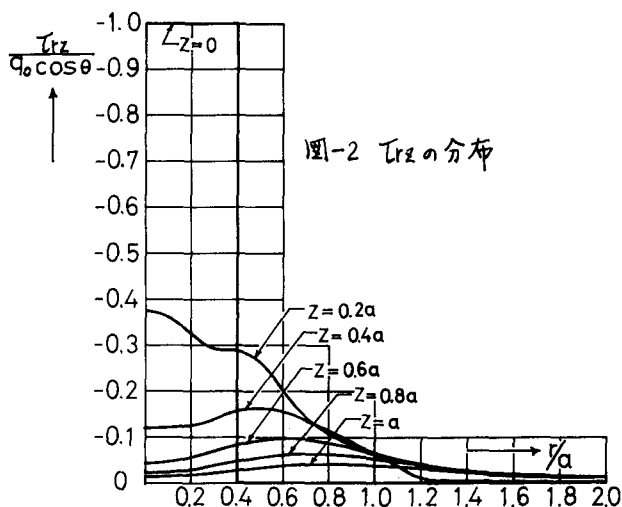


図-2 τ_{rz} の分布