I－13　　積分方程式による拡散問題の解析

京都大学大学院　学生員　原　利弘
京都大学工学部　正　員　丹羽義次
京都大学工学部　正　員　小林昭一

1．はじめに

土木分野において、拡散現象は地盤の圧密、河川の汚染、構造物の熱伝導など広範に見られ、この現象の適確な解析は、土木工学の分野における重要な問題の一つである。これまでにも拡散問題の解析には、フーリエ変換、ラプラス変換、差分法、さらには有限要素法など多くの手法が試みられており、個々の問題に応じて、それぞれの解法の工夫がなされている。本報告では、最近注目されつつある積分方程式を用いて、熱伝導問題を例にとり拡散方程式を解析することを試みる。

2．積分方程式への定式化

境界∂Dで囲まれた内部領域をD、外部領域を$\bar{D}$、∂D上の外向き単位法線ベクトルをnとする。一般に熱伝導問題は、偏微分作用素を$\mathbb{L}$として(1)で表わされる基礎式を、与えられた初期条件及び境界条件のもとで解くことを意味する。ただしこの場合、物質は等方均質とし、放射発熱等の影響は考慮しない。

$$\mathbb{L}u(x,t)=\nabla^2 u(x,t)-\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}=0 \tag{1}$$

与えられた境界値問題を積分方程式に変換するために、随伴作用素$\mathbb{M}v=\nabla^2 v+\frac{\partial v}{\partial t}$を用いて、グリーンの相反定理を適用すれば次のようになる。

$$\int_0^t d\tau\int_D (v\mathbb{L}u-u\mathbb{M}v)\,dV=\int_0^t d\tau\int_{\partial D}\left(v\frac{\partial u}{\partial n}-u\frac{\partial v}{\partial n}\right)dS +\int_{D,\tau=0} uv\,dV-\int_{D,\tau=t} uv\,dV \tag{2}$$

この式において、ディラックのデルタ関数δで表わされる基本特異解$H(x,t;\xi,\tau)$、$\mathbb{L}H(x,t;\xi,\tau)=-\delta(x-\xi)\delta(t-\tau)$を用いれば、求める積分方程式は方程式(1)を満足する$u(x,t)$について、初期条件を$u(x,0)$として下に示すような式となる。

$$F(x)u(x,t)=\int_0^t d\tau\int_{\partial D}\left\{H(x,\xi;t,\tau)\frac{\partial u(\xi,\tau)}{\partial n_\xi}-u(\xi,\tau)\frac{\partial H(x,\xi;t,\tau)}{\partial n_\xi}\right\}dS_\xi +\int_D H(x,\xi;t,0)\,u(\xi,0)\,dV_\xi \qquad F(x)=\begin{cases}1 & x\in D\\ \frac{1}{2} & x\in\partial D\\ 0 & x\in\bar{D}\end{cases} \tag{3}$$

$$H(x,\xi;t,\tau)=\begin{cases}0 & t<\tau\\ \frac{1}{4\pi(t-\tau)}\exp\left\{-\frac{r^2}{4(t-\tau)}\right\} & t>\tau\end{cases}\qquad r=|x-\xi|$$

この式は、$x\in\partial D$の場合、境界上の$u(x,t)$と$\frac{\partial u(x,t)}{\partial n_x}$との間の関係式で、境界上でいずれかが既知であれば、他の量を未知数とする積分方程式となり、これを解くことにより境界上の値はすべて求められ、さらに内点$x\in D$における$u(x,t)$をも求め得る。

3．解析手法

(3)式は時間軸tに対してVolterra型、空間軸xに対してFredholm型の積分方程式を構成しており、実際に離散化して数値積分するに当り、両者に対して次のような近似法を採用する。

$$\text{Volterra型}\qquad u(t)=\int_0^t u(\tau)K(t,\tau)\,d\tau \longrightarrow u(t_k)=\sum_{l=1}^{k}\left\{\frac{u(t_{l-1})+u(t_l)}{2}\right\}K(t_k,t_{l-\frac{1}{2}})\Delta t \tag{4}$$

$$\text{Fredholm型}\quad u(x)=\int_{\partial D} u(\xi)K(x,\xi)\,dS_\xi \longrightarrow u(x_i)=\sum_{j=1}^{N} u(x_j)K(x_i,x_j)\Delta S_j \qquad (5)$$

(4), (5)式を用いて(3)式を離散化して連立方程式に直す場合、初期条件$u(x,0)$の与え方により次の2つの異った手法が考えられる。

手法1.
$$F(x_i)u(x_i,t_k)=\sum_{l=1}^{k}\sum_{j=1}^{N}\left[H(x_i,t_k;x_j,t_{l-\frac{1}{2}})\left\{\frac{\frac{\partial u(x_j,t_{l-1})}{\partial n_j}+\frac{\partial u(x_j,t_l)}{\partial n_j}}{2}\right\}-\frac{\partial H(x_i,t_k;x_j,t_{l-\frac{1}{2}})}{\partial n_j}\left\{\frac{u(x_j,t_{l-1})+u(x_j,t_l)}{2}\right\}\right]\Delta S_j\Delta t$$

$u(x,0)=0.$(const.)の場合で時間軸に対して直接step by stepで解くことを意味する.

手法2.
$$F(x_i)u(x_i,t_k)=\sum_{j=1}^{N}\left[H(x_i,t_k;x_j,t_{k-\frac{1}{2}})\left\{\frac{\frac{\partial u(x_j,t_{k-1})}{\partial n_j}+\frac{\partial u(x_j,t_k)}{\partial n_j}}{2}\right\}-\frac{\partial H(x_i,t_k;x_j,t_{k-\frac{1}{2}})}{\partial n_j}\left\{\frac{u(x_j,t_{k-1})+u(x_j,t_k)}{2}\right\}\right]\Delta S_j\Delta t$$
$$+\sum_{m}^{N'}H(x_i,t_k;x_m,t_{k-\frac{1}{2}})u(x_m,t_{k-1})\Delta V_m$$

$u(x,0)$が一般に任意な関数で与えられた場合で、あるstepで必要な値が計算されれば、そのstepを初期条件として次のstepを計算してゆく方法である.

4. 解析例及び考察

(1)解析モデル及び解析条件　解析手法に検討を加えるために、理論解の容易に求まる基本的な二次元問題として図-1に示すような混合境界条件をもつ正方形モデルについて解析した。　初期条件 $u(x,0)=0.$(const.)　$x\in D+\partial D$

(2)解析結果及び考察　手法1を用いた解析結果を図-3に、理論解を図-2に示す. 図より明らかに要素分割の少なさを考慮すれば、かなりの精度で$u(x,t)$の値が得られていることがわかる。また、この手法の優れた特徴は、$u(x,t)$の値が境界積分だけで求まるという点にあり、領域積分に伴う解析の複雑化，誤差の増大化を回避することができる。なおこの解析法における問題点としては、①step by stepによる誤差の累積化　②基本特異解の特異点での評価の問題　③初期条件と境界条件の不連続性の問題などがあげられる. これらの問題に対応する改善策として、①step間隔Δtに関連した安定性の検討、②特異点近傍での$H(x,t;\xi,\tau)$の厳密な積分値としての評価、③については特に図-4に示すように、初期条件と境界条件が連続化するような補助関数の導入などが考えられ、実際にこれらの方法を解析に適用した場合、値はかなり改良された. なお、領域積分項を含む手法2については現在計算中であり、その解析結果並びに手法1との比較検討については、上に述べた問題の検討と合わせて当日発表する。

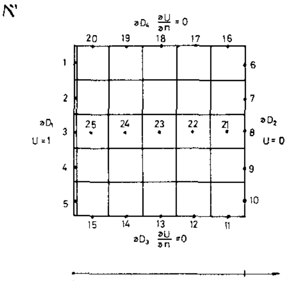

図-1　正方形モデル

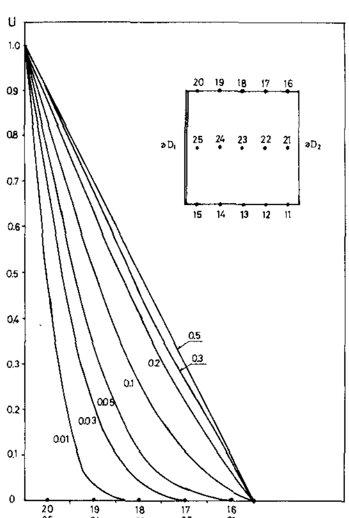

図-2　理論解

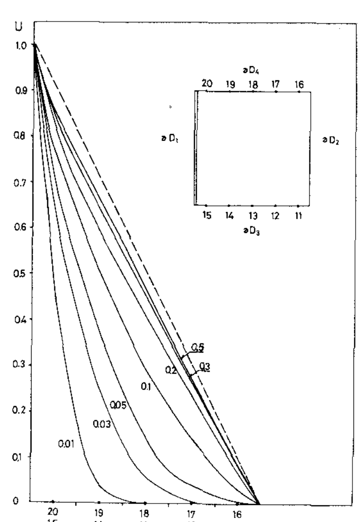

図-3　解析解

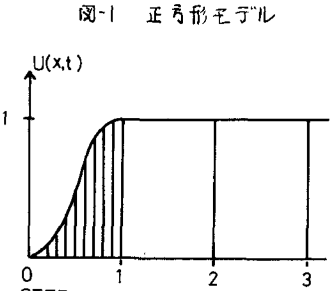

図-4. 補助関数