I-12　積分方程式による固有値問題

京都大学大学院　学生員　北原道弘
京都大学工学部　正　員　丹羽義次
京都大学工学部　正　員　小林昭一

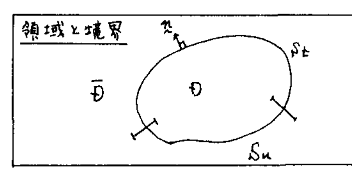
弾性学における固有値問題においてHelmholtz型方程式が変数分離不可能な系に対する解法として　たとえば　変分原理　摂動法　有限要素法　積分方程式法　などが考えられるが　ここでは面内固有振動問題を取り上げ　積分方程式法により解析を行なう。この手法は場を支配する偏微分方程式を　積分方程式に変換し　領域内部と境界上の未知関数をある積分関係式で記述するものである．境界積分方程式への変換により解くべき代数方程式は著しく低次元化されることになり数値計算上の利点は大きい。いわゆる固有値問題に対する概念は薄れ固有値の決定は積分核並びにその係数にあるパラメータを含む　複素超越方程式の零点を求める問題に帰着する。この点が積分方程式法の利点を引き出したことによる必然的結果であり、パラメーターが陽に現われるFredholm型の方程式に変換した場合には領域積分が必要となる。　線形　等方　弾性体を対象とし　楕円型方程式の線形斉次境界値問題と数値計算法を略述する。

記号の定義　$\mathbb{L}=\mathbb{L}^*+\rho\omega^2=\lambda\nabla\nabla\cdot+\mu\nabla\cdot\nabla+\mu\nabla\cdot\nabla^T+\rho\omega^2$,　$\overset{n}{\mathbb{T}}=\lambda n\nabla\cdot+\mu n\cdot\nabla+\mu n\cdot\nabla^T$, $^t\overset{n}{\mathbb{T}}=\lambda\nabla n\cdot+\mu\nabla\cdot n+\mu\nabla n^T$：偏微分作用素

u, t, n, f：変位，応力，単位法線，単位体積当りの物体力ベクトル；　c_L, c_T：縦波，横波の波速

基礎偏微分方程式と境界条件　（斉次境界値問題）

(1)　$\mathbb{L}u=0$　　$u(x)=0$　$x\in S_u$　,　$t(x)=\overset{n}{\mathbb{T}}u(x)=0$　$x\in S_t$



広義Bettyの相反作用の定理　（Green 第2公式）

内部Cauchy問題として定式化するため特性関数を　$H(s)=\begin{cases}1 & x\in D\\ 0 & x\in\bar{D}\end{cases}$　と定義し　distributionの意味における2階導関数の関係式　$\nabla\nabla u=\{\nabla\nabla u\}+n[\nabla u]_s\delta(s)+\nabla(n[u]_s\delta(s))$　　$\{\ \}$は通常の意味における導関数　$[\ ]_s$は曲面SにおけるDから$\bar{D}$への関数の跳び　に注意して　$H(s)u$に作用素$\mathbb{L}$を適用して　次式を得る。

(2)　$\mathbb{L}(H(s)u)=H(s)\{\mathbb{L}u\}-(\overset{n}{\mathbb{T}}u)\delta(s)-(^t\overset{n}{\mathbb{T}}(u\delta(s))=-(\overset{n}{\mathbb{T}}u)\delta(s)-{}^t\overset{n}{\mathbb{T}}(u\delta(s))$

基　本　特　異　解

(3)　$\mathbb{L}^*\mathbf{U}(x;y)=-\mathbf{1}\delta_x(y)$　　　$\mathbf{U}$を方程式(1)の第1基本特異解と呼ぶ。　$\mathbf{1}(=\delta_{ij})$ 単位テンソル　δ：Dirac measure

Hörmanderの結果より　$\mathbf{U}$を求めることは　$\det\mathbb{L}$　なるスカラーオペレーターの解を求めること　即ちHelmholtz作用素の基本解を求める問題に　帰着し　2次元平面ひずみ問題　に対しては次のように求まる。

(4)　$U_{ij}(x;y)=\frac{i}{4\mu}\left[H_0^{(1)}(\xi_2r)\delta_{ij}+\frac{1}{\xi_2}\partial_{x_i}\partial_{x_j}\{H_0^{(1)}(\xi_2r)-H_0^{(1)}(\xi_1r)\}\right]$　　$H_0^{(1)}(z)$：第一種0次Hankel関数　$\xi_1=\frac{\omega}{c_L}$　$\xi_2=\frac{\omega}{c_T}$　$r=|x-y|$

広義Somigliana恒等式　（Green 第3公式）

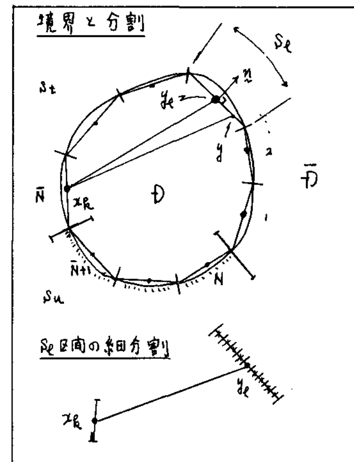
超関数方程式(2)の解が存在すればその解uは基本特異解$\mathbf{U}$と(2)の右辺の合成積として次のように表示できる。

(5)　$H(s)u(x)=\mathbf{U}*(\overset{n_x}{\mathbb{T}}u)\delta_x(s)+\mathbf{U}*(^t\overset{n_x}{\mathbb{T}}u)\delta_x(s)=\int_S\mathbf{U}(x;y)\cdot t(y)dS_y-\int_S\mathbf{T}(x;y)\cdot u(y)\,dS_y$

(6)　$T_{ij}(x;y)=(\overset{n_y}{\mathbb{T}}\mathbf{U}(x;y))_{ij}=\frac{i}{4\mu}\left[(\lambda n_{y_j}\partial_{y_i}+\mu n_{y_i}\partial_{y_j}+\mu n_{y_k}\partial_{y_k}\delta_{ij})H_0^{(1)}(\xi_2r)+\frac{1}{\xi_2^2}(\lambda n_{y_j}\partial_{y_i}\partial_{y_k}\partial_{y_k}+2\mu n_{y_k}\partial_{y_k}\partial_{y_i}\partial_{y_j})\{H_0^{(1)}(\xi_2r)-H_0^{(1)}(\xi_1r)\}\right]$：第2基本特異解

解の表示式(5)は　物体力が存在しない場合　領域内任意点の変位は　境界上での2つのポテンシャル密度t, uが決定されれば決まることを示しており，　2つの基本解$\mathbf{U}$,$\mathbf{T}$に含まれるパラメーターωがある特定の値を

取った時 零でない 未知密度 t, u が存在 することになり，この時の ω が求める固有値となる。 通常の積分方程式への移行における u でなく オペレータ-L に対して基本解を構成したことに起因して，ξ_1, ξ_2 （ここにパラメータ ω が含まれる）が２つの基本解に いかなる形で組み込まれたかには注意を要する。 ここが通常行なわれる微分作用素から積分作用素への固有値問題の変換という形を避けて 境界積分方程式(5)に変換した帰結であるが (4) (6)式から Hankel 関数の引数と その係数に パラメータ ω を含む 超越方程式を構成している。このことは等方弾性体に２つの波が存在することとの兼ね合いから ある意味では問題を困難にしているが 数値計算におけるこの問題の指針は縦波 横波の波速 C_L, C_T にある。



解析で対象とする境界値問題

$$
(7)\quad
\begin{aligned}
\frac{1}{2}\underset{\sim}{u}(x) &= \int_{S_u} \mathbf{U}(x;y)\cdot\underset{\sim}{t}(y)\,dS_y - \int_{S_t} \mathbf{T}(x;y)\cdot\underset{\sim}{u}(y)\,dS_y \qquad x\in S_t \\
\underset{\sim}{0} &= \int_{S_u} \mathbf{U}(x;y)\cdot\underset{\sim}{t}(y)\,dS_y - \int_{S_t} \mathbf{T}(x;y)\cdot\underset{\sim}{u}(y)\,dS_y \qquad x\in S_u
\end{aligned}
$$

境界分割と代数方程式 並びに数値計算法

式(7)の積分を評価するために境界を N 個に分割し次の仮定と定義を設ける

(i) 分割要素は直線で近似。

(ii) 未知関数（密度） u, t 並びに n_i $r_{,i}$ $\frac{\partial r}{\partial n_y}$ は分割要素 S_ℓ を通じ一定と仮定し その中心 y_ℓ での値で評価する。

x_k：積分の間 固定された第 k 番目直線要素の中心 (*field point*)
y_ℓ：積分の間 変化する (*source point* y) 第 ℓ 番目直線要素の中心

この仮定のもとでは 第1, 第2の基本特異解の S_ℓ 区間積分の値は境界形状と境界上の点 x_k を与えれば S_ℓ 区間から x_k 点への影響係数として 積分値が定まることとなるが 数値計算上は 基本解の特異性のため ここでは S_ℓ 区間をさらに細分割し Cauchy の主値の意味において評価し，積分値を次のように記すことにする。

$$
\bar{U}_{ij}(x_k;y_\ell)=\int_{S_\ell}U_{ij}(x_k;y)\,dS_y \qquad \bar{T}_{ij}(x_k;y_\ell)=-\int_{S_\ell}T_{ij}(x_k;y)\,dS_y \qquad \bar{T}'_{ij}(x_k;y_\ell)=-\int_{S_\ell}T_{ij}(x_k;y)\,dS_y-\frac{1}{2}\delta_{ij}\delta_{k\ell}
$$

各区間での影響係数が 上のように定まると 境界積分方程式(7)は 次のような線形同次代数方程式に導かれる。

$$
(8)\quad
\begin{aligned}
&\sum_{\ell=1}^{\bar{N}}\bar{T}'_{ij}(x_k;y_\ell)u_j(y_\ell)+\sum_{\ell=\bar{N}+1}^{N}\bar{U}_{ij}(x_k;y_\ell)t_j(y_\ell)=0 \qquad x\in S_t \quad (k=1,2\cdots\bar{N}) \\
&\sum_{\ell=1}^{\bar{N}}\bar{T}_{ij}(x_k;y_\ell)u_j(y_\ell)+\sum_{\ell=\bar{N}+1}^{N}\bar{U}_{ij}(x_k;y_\ell)t_j(y_\ell)=0 \qquad x\in S_u \quad (k=\bar{N}+1\cdots N)
\end{aligned}
$$

一般的にマトリックス表示すると $\quad [A_{ij}(x_k;y_\ell)]\{\varphi_j(y_\ell)\}=0$

A_{ij} のすべての要素に パラメータ ω を含む $2N$ 次元複素連立方程式の未知関数 φ_j を求める問題に帰着されたが 原理的には 恒等的に零でない解 $\{\varphi_j\}$ が存在するための必要十分条件 $\det|A_{ij}|=0$ より固有値 ω が求められる。

積分方程式による固有値問題 における数値計算上の利点と問題点

積分方程式法の最も大きな長所は境界上でのみの分割に起因するマトリックスの小型化であり 固有値問題における行列式の計算のように単なる掃き出し演算だけでは済まない問題に対しこの点特に有利であると思われる。ここで対称としているような厳密解の存在しない問題に対し 複素行列式の根の評価のためには ある区間にわたってパラメータ ω を変化させ そのステップごとに行列式の値を計算する必要があり 固有値の第一近似を探す点がまず問題となる この点については 縦波 横波の波速とパラメータ ω を適切に評価してこの固有値の第一近似が求まれば パラメータの増分巾をさらに小さくすることにより 真の固有値に近づけることができる。

解析例 は 当日 報告する。