I-10　Couple Stress を考慮した二次元弾性体の基本解

山梨大学·工学部　平島健一
千葉県·水道局○富沢茂司

1. まえがき

実際の材料は種々の形状特性，例えば粒状性，結晶性，多孔性，繊維状性，層状性等の特性を有し，それらの規則的あるいは不規則的な配列，分布を示す複雑な結合，混合状態を有しているのが普通である。このような材料に対して従来までの古典連続体力学の理論を適用することは，真の力学挙動を正確に説明しえない場合も生じてくることが予想される。したがって，材料の構成要素の形状，組織特性までも考慮した力学理論が必要となる。構成要素の幾何学的特性および局所回転を考慮した連続体力学は総称して一般化連続体力学と呼ばれており，本文で取り扱う偶応力理論[3)]およびマイクロポーラ理論[4)]もその一つである。

Voigt (1887) および E. & F. Cosserat (1909) をその理論の発端とし，1960年代にかって彼らの考え方を展開，拡張した数百にのぼる論文が発表され現在に至っている。それらの理論のうち線形弾性体に対する偶応力理論およびマイクロポーラ理論の力学定数は，古典的な二つの Lamé 定数に加えて，さらにそれぞれ二個および四個の定数が導入されるが，それらの実際材料に対する実験的な測定の試みも幾つかなされている[11)]。

本文では上記の二つの理論に対する二次元問題の基本解を複素変数法によって定式化したものである。この方面の研究としては Mindlin (1963), Huilgol (1967), Ariman & Zika (1971) 等を列挙することができるが，本論文ではそれらの一般化と誤りに対する訂正を行ない，弾性論の基本問題である無限板に集中力あるいは集中偶力が作用した，いわゆる"特異性問題 (singular problem)"について閉じた形の解と二，三の数値例を提示する。

2. 基礎式とその一般解

偶応力理論（拘束回転を有する Cosserat 連続体理論または"不確定"偶応力理論ともいわれる）はマイクロポーラ理論の係数を特殊化することによって導出できるものであるが，ここでは Cowin (1970) にしたがって連成数 (coupling number): N を導入して両者の理論を統一的に取り扱うことにする。静的問題で物体力ならびに物体偶力を無視した場合の二次元弾性体に対する基礎式（釣合，構成，幾何学的関係，適合の各方程式）は次のようになる[4)]。

$$\frac{\partial t_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial t_{yx}}{\partial y}=0,\quad \frac{\partial t_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial t_{yy}}{\partial y}=0,\quad \frac{\partial m_{xz}}{\partial x}+\frac{\partial m_{yz}}{\partial y}+t_{xy}-t_{yx}=0 \quad\cdots\cdots(1)$$

$$\varepsilon_{xx}=\frac{1}{2G}\{t_{xx}-\nu(t_{xx}+t_{yy})\},\ \varepsilon_{yy}=\frac{1}{2G}\{t_{yy}-\nu(t_{yy}+t_{xx})\},\ \varepsilon_{xy}+\varepsilon_{yx}=\frac{1}{2G}(t_{xy}+t_{yx}),\ \varepsilon_{xy}-\varepsilon_{yx}=-\frac{1}{\kappa}(t_{xy}-t_{yx}),\ m_{xz}=\gamma\frac{\partial\phi_z}{\partial x},\ m_{yz}=\gamma\frac{\partial\phi_z}{\partial y} \quad\cdots(2)$$

$$\varepsilon_{xx}=\frac{\partial u}{\partial x},\quad \varepsilon_{yy}=\frac{\partial v}{\partial y},\quad \varepsilon_{xy}=\frac{\partial v}{\partial x}-\phi_z,\quad \varepsilon_{yx}=\frac{\partial u}{\partial y}+\phi_z \quad\cdots\cdots(3)$$

$$\frac{\partial\varepsilon_{xx}}{\partial y}-\frac{\partial\varepsilon_{yx}}{\partial x}+\frac{\partial\phi_z}{\partial x}=0,\quad \frac{\partial\varepsilon_{yy}}{\partial x}-\frac{\partial\varepsilon_{xy}}{\partial y}-\frac{\partial\phi_z}{\partial y}=0,\quad \frac{\partial m_{xz}}{\partial y}=\frac{\partial m_{yz}}{\partial x} \quad\cdots\cdots(4)$$

ここに，m_{xz}, m_{yz} は Fig.1 に示すような偶応力 (couple stress) の成分であり，ϕ_z は micro-rotation である。G はせん断弾性係数，ν は Poisson 比，κ, γ は新しく導入された力学定数である。釣合方程式(1)を満たすように応力関数 U および V を導入して(4)式に代入すると

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x}(V-l_1^2\nabla^2 V)&=-2(1-\nu)l^2\frac{\partial}{\partial y}\nabla^2 U,\\ \frac{\partial}{\partial y}(V-l_1^2\nabla^2 V)&=-2(1-\nu)l^2\frac{\partial}{\partial x}\nabla^2 U.\end{aligned}\right\}\quad\cdots\cdots(5)$$

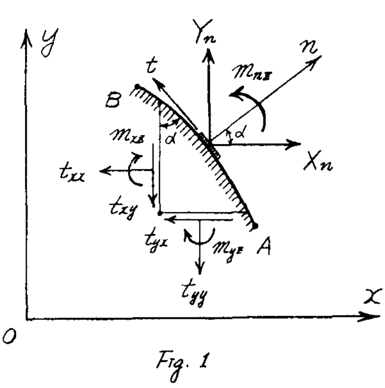

Fig. 1

ここに，

$$l^2=\frac{\gamma}{4G},\quad l_1^2=\frac{l^2}{N^2},\quad N^2=\frac{\kappa}{2G+\kappa} \quad\cdots\cdots(6)\qquad \nabla^4 U=0,\quad \nabla^2(1-l_1^2\nabla^2 V)=0 \quad\cdots\cdots(7)$$

が与えられる。(5)式をさらに整理したものが，上記の(7)式であり，この式では U と V の間の Coupling はなくなる。U は従来までの二次元の Airy の応力関数であり，V は新しく導入された偶応力関数である。したがって，U は Muskhelishvili (1963) と全く同様に二つの複素解析関数 $\Phi(z)$, $\Psi(z)$ で表示でき，他方，V は円柱座標系に対し

$$V=\sum_{n=0}^{\infty}(b_n z^{-n}+\bar{b}_n \bar{z}^{-n})+d_0 K_0\left(\frac{\sqrt{z\bar{z}}}{l_1}\right)+\sum_{n=1}^{\infty}K_n\left(\frac{\sqrt{z\bar{z}}}{l_1}\right)\cdot(C_n \sin n\theta+d_n \cos n\theta) \quad \cdots\cdots (8)$$

（ただし，上記の解は無限遠まで拡がった領域に対するものである）。K_n：第2種変形ベッセル関数という形の解が求められる。　いま，関数$\Phi(z)$，$\Psi(z)$をHuilgolと同様に次式：

$$\Phi(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n z^{-n}, \quad \Psi(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n' z^{-n} \quad \cdots\cdots (9)$$

のように仮定し，Fig.2の一定半径$r=R$での作用外力をN, T, Mとするとき，

$$N-iT=(t_{rr}-it_{r\theta})_{r=R}\equiv\sum_{n=-\infty}^{\infty}A_n e^{in\theta}, \quad M=m_{rz}\equiv\sum_{n=-\infty}^{\infty}B_n e^{in\theta} \quad \cdots\cdots (10)$$

と置いた複素Fourier級数の係数A_n, B_nとa_n, a_n', b_n, C_n, d_nとの関係は次のようになる。

$$\left.\begin{aligned}
&a_n=\frac{\bar{A}_n+\delta_{n2}\bar{a}_0'-\dfrac{2(n-1)K_{n-1}}{K_{n-1}+K_{n+1}}\bar{B}_n}{\dfrac{1}{R^n}\left\{1-\dfrac{8n(n-1)(1-\nu)K_{n-1}}{K_{n-1}+K_{n+1}}\left(\dfrac{l}{R}\right)^2\right\}},\ (n\geq 2), \quad C_n-id_n=\frac{4l_1}{K_{n-1}+K_{n+1}}\left\{i\bar{B}_n+\frac{4n(1-\nu)l}{R^n}\left(\frac{l}{R}\right)a_n\right\}\\
&b_n=-4(1-\nu)l^2\cdot i a_n,\ (n\geq 0), \quad a_1'=R(\bar{a}_1-A_1), \quad a_2'=R^2(a_0+\bar{a}_0-A_0)\\
&a_{n+2}'=(n+1)R^2 a_n\left\{1-8n(1-\nu)\left(\frac{l}{R}\right)^2\left(1-\frac{K_{n+1}}{K_{n-1}+K_{n+1}}\right)\right\}+\frac{2(n+1)K_{n+1}}{K_{n-1}+K_{n+1}}R^{n+1}\bar{B}_n-R^{n+2}A_{-n},\ (n\geq 1)
\end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots (11)$$

したがって，

a_0, a_0'およびa_1以外のすべての係数がA_n, B_nで決定されたことになる。　このうち，a_0, a_0'は無限遠に作用する外荷重応力から決定され，残りのa_1は円孔内に作用する予釣合集中力によって定まるものである。

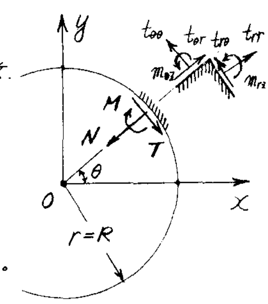

Fig. 2

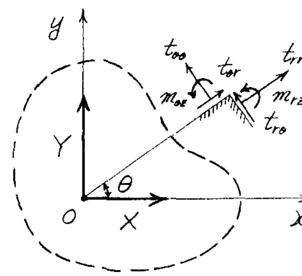

Fig. 3

3. 集中力または集中偶力が作用する無限板

Fig.3のように座標原点に集中力Xが作用する，いわゆる"Kelvin問題"を考える。　この種の問題はsingular problemと云われるものであって，必ずしも一意的に解が定められず，事実この二次元の場合には三次元解からの演繹による助けが必要である。　半径Rの円を零に収束させて行ったとき，a_1, a_1'はMuskhelishviliの結果と一致するように定め，他方，偶応力成分m_{rz}と$R\to 0$のとき$m_{rz}\to 0$となるようにして(11)式の各係数を決定したものは，三次元解から計算したWeitsmanの結果と，偶応力理論（$l_1=l$ i.e. $N=1.00$）に対して完全に一致したが，Huilgolの結果とは異なったものとして得られた。　これはHuilgolの計算式に誤りがあるためであり，同じくArman & Zrkaについてもその事が指摘できる。　具体的な式は次のようになる．

$$\left.\begin{aligned}
&\Phi(z)=a_1 z^{-1}, \quad \Psi(z)=a_1' z^{-1}, \quad V(z,\bar{z})=2\mathrm{Re}[b_1 z^{-1}]+C_1 K_1 \sin\theta\\
&a_1=-\frac{X}{2\pi(1+k)}, \quad a_1'=\frac{kX}{2\pi(1+k)}, \quad b_1=-4(1-\nu)l^2 i a_1, \quad C_1=-\frac{4(1-\nu)X}{\pi(1+k)}\frac{l^2}{l_1}
\end{aligned}\right\} \cdots (12)$$

ここに，$k=3-4\nu$（平面ひずみ状態）である。　結果の一例をl, Nを変化させて図示したものがFig.4~6である。　Fig.7は集中偶力が作用する場合の結果である。

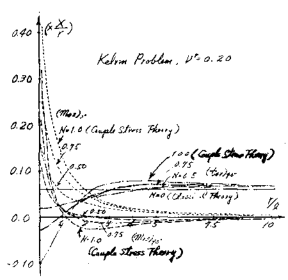

Fig. 4

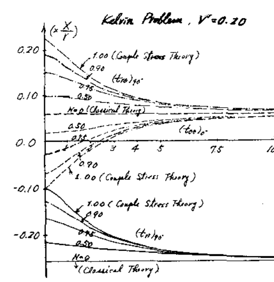

Fig. 5

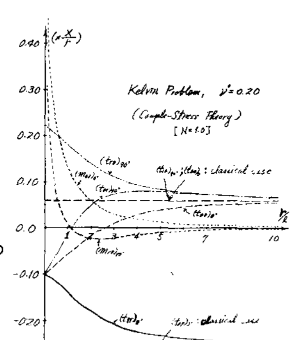

Fig. 6

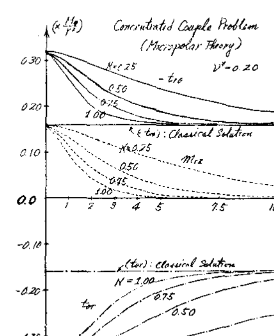

Fig. 7

参考文献：　1) Voigt, W. (1887). Abh. Ges. Wiss., 34, 2) Cosserat, E. & F. (1909). Theory des corps deformable, A. Herman et Fils (Paris) 3) Mindlin, R.D. & H.F. Tiersten (1962), Arch. Rat. Mech. Anal., 11, p.415. 4) Eringen, A.C. (1968), Fracture (Ed. by H. Liebowitz), Vol.2, Academic Press, p.621. 5) Mindlin, R.D. (1963). Proc. Int. Symp. Appl. of Theory of Functions in Continuum Mech., p.256. 6) Huilgol, R.R. (1967). Int. J. Eng. Sci. 5, p.81, 7) Ariman, T. & M.J. Zika (1971), ZAMM, 51, s.183. 8) Cowin, S.C. (1970), ZAMP, 21, s494, 9) Weitsman, Y. (1968). Quat. Appl. Mech., 25, p.485, 10) Muskhelishvili, N.I. (1963) (4th Ed.) Noordhoff. 11) Gauthier, R.D. & W.E. Jahsman (1975), J. Appl. Mech., p.369