

山梨大学・工学部 平島健一

山梨大学・大学院 小林俊昭

1. 緒言

せん断変形を考慮した梁の問題は従来から多くの研究者によりなされてきているが、その代表的なものとして、Timoshenko梁として、せん断変形と回転慣性は考慮した問題であり、その場合のせん断補正係数は断面の平均せん断応力と圆心におけるせん断応力の比率として定義されている。しかしながら、この定義による補正係数は高次振動の問題に対してよい結果が得られないことがわかってより指摘されていた。Cowper¹⁾はこの欠点を鑑みて、三次元弾性論にもとづく新たなせん断補正係数を定義し、各種の断面をもつ梁の場合について、 E と ν の比の肉数として具体的に求め、また矩形断面の梁と例にとり、高次振動の場合によく適合することを示した²⁾。

本論文は上記のCowperの考え方に基き、せん断補正係数の異方性をもつ梁の問題への拡張を試みたものであり、とらに得られた結果と梁および板の固有値問題に適用し、その影響について考察することとを目的としたものである。

2. 仮定と解析手順の概要

問題の簡単化のために、直交異方性の等質弾性体と対象とし、以下に示すような仮定を設ける。

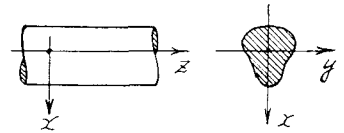


Fig. 1

- (i) 梁の軸方向を z 軸とし、この軸は断面の圆心線と一致する。
 - (ii) 作用荷重は z - x 面に関して対称であるように仮定。
 - (iii) 物体力と表面力の z 方向成分は零である。
 - (iv) 三つの弾性対称面と x - y 、 y - z 、 z - x 面に一致する^(ようね)直交異方性とする。
- このように仮定すると本論文における基礎方程式は次の4つとなる。

$$\frac{\partial Q}{\partial z} + p = \rho A \frac{\partial^2 U}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial M}{\partial z} - Q = \rho I_y \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2}, \quad E_y I_y \frac{\partial \Phi}{\partial z} = M - \frac{E_x \nu_{xy}}{E_x} \iint x \sigma_x dx dy - \frac{E_y \nu_{xy}}{E_y} \iint x \sigma_y dx dy, \quad \frac{\partial U}{\partial z} + \Phi = \frac{1}{A G_{xz}} \iint (\chi_{xz} - G_{xz} \frac{\partial \bar{w}}{\partial x}) dx dy \dots (1)$$

ここに、 ρ :梁の単位長さ当たりの要素に働く外力、 A :梁断面積、 I_y : y 軸に関する断面2次モーメント、 ρ :材料密度、 U :断面の x 軸方向の平均変位、 Φ :断面の平均回転角、 $\bar{w}$ は次式で定義されるものである。

$$\bar{w} = w - (w + x\Phi), \quad w = \frac{1}{A} \iint w dx dy \dots (2) \quad \text{ただし、} w \text{は断面の任意点の} z \text{方向変位、} \bar{w} \text{はその平均変位}$$

先端に集中荷重と受ける直交異方性の片持梁および一様分布荷重と受ける異方性梁に対するせん断応力および z 方向変位 w は次式で与えられる。

$$\chi_{xz} = -\frac{Q}{E_x I_y} \left\{ \frac{\partial \chi}{\partial x} + \frac{1}{2} \nu_{xz} x^2 + \frac{E_x - G_{xz} \nu_{xz} - G_{yz} \nu_{yz}}{2 G_{yz}} y^2 \right\}, \quad \chi_{yz} = -\frac{G_{yz} Q}{E_x I_y} \left\{ \frac{\partial \chi}{\partial y} + \frac{E_x - G_{xz} \nu_{xz} - G_{yz} \nu_{yz}}{G_{yz}} x y \right\}, \quad w = x f(z) - \frac{Q}{E_x I_y} \left\{ \chi + \frac{E_x - G_{xz} \nu_{xz} - G_{yz} \nu_{yz}}{2 G_{yz}} x y^2 \right\} \dots (3)$$

ここに、 χ は梁の曲げ問題に対する応力関数で、次の基礎方程式と境界条件と満足しなければならぬ。

$$G_{xz} \frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2} + G_{yz} \frac{\partial^2 \chi}{\partial y^2} = 0, \quad \text{cov}(x, \chi) G_{xz} \frac{\partial \chi}{\partial x} + \text{cov}(y, \chi) G_{yz} \frac{\partial \chi}{\partial y} = -\text{cov}(x, \chi) G_{yz} \left(\frac{1}{2} \nu_{xz} x^2 + \frac{E_x - G_{xz} \nu_{xz} - 2 G_{yz} \nu_{yz}}{2 G_{yz}} y^2 \right) - \text{cov}(x, \chi) (E_x - G_{xz} \nu_{xz}) x y \dots (4)$$

Cowperと同様に、三つの仮定を導入すると、(3)と(2)から次式を得る。

$$\bar{w} = \frac{Q}{E_x I_y} \left\{ -\left(\chi + \frac{E_x - G_{xz} \nu_{xz} - G_{yz} \nu_{yz}}{2 G_{yz}} x y^2 \right) + \frac{1}{A} \iint \left(\chi + \frac{E_x - G_{xz} \nu_{xz} - G_{yz} \nu_{yz}}{2 G_{yz}} x y \right) dx dy + \frac{x}{I_y} \iint x \left(\chi + \frac{E_x - G_{xz} \nu_{xz} - G_{yz} \nu_{yz}}{2 G_{yz}} x y^2 \right) dx dy \right\} \dots (5)$$

さらに、この式を(1)の積分項に代入すれば次式が求められる。

$$\iint (\chi_{xz} - G_{xz} \frac{\partial \bar{w}}{\partial x}) dx dy = \frac{G_{xz} Q}{E_x I_y} \left\{ \frac{1}{2} \nu_{yz} I_x - \nu_{xz} I_y \right\} - \frac{A}{I_y} \iint x \left(\chi + \frac{E_x - G_{xz} \nu_{xz} - G_{yz} \nu_{yz}}{2 G_{yz}} x y^2 \right) dx dy \dots (6)$$

ここに、 I_x は x 軸に関する断面2次モーメントである。

(6)式を(5)に代入すれば、所期の目的のせん断補正係数を求める式が得られる。

$$\frac{\partial U}{\partial \xi} + \frac{Q}{kAG_{xx}} = \frac{E_x I_y}{G_{xx} \left\{ \frac{1}{2} (V_{xy} I_x - V_{xx} I_y) - \frac{A}{I_x} \int \int x (\chi + \frac{E_x - G_{xx} V_{xx} - G_{xy} V_{xy}}{2G_{xx}}) dx dy \right\}} \quad (7)$$

上式の \$k\$ は直交異方性梁に対するせん断補正係数であるが、\$=k\$ に等方性の場合としての特殊な値 (i.e. \$E_x=E\$, \$V_{xx}=V_{xy}=V\$, \$G_{xx}=G_{xy}=G\$) と代入すると Cowper の導いた次式がえられる。

$$k = \frac{2(1+\nu)I_y}{\frac{1}{2}V(I_x - I_y) - \frac{A}{I_y} \int \int x(\chi + x y^2) dx dy}, \quad \frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \chi}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial \chi}{\partial x} = -\cos(N, x) \left\{ \frac{1}{2} V x^2 + (1 - \frac{1}{2} V) y^2 \right\} - \cos(N, y) \cdot (2 + V) x y \quad (8)$$

3. せん断補正係数の計算例

問題は (4) 式の基礎式と境界条件のもとで解き (7) 式に代入すれば、求める \$k\$ がえられる。こゝでは、矩形断面と楕円断面 (共に中央) の二種に \$\chi\$ を例示する。

(a) 矩形断面の場合: 右図のような矩形断面梁に対するねじり力関数 \$\chi\$ は次のようになる。

$$\chi = \frac{1}{6} \frac{E_x - G_{xx} V_{xx}}{G_{xx} G_{yy}} (G_{yy} x^2 - 3 G_{xx} x y^2) + \left(\frac{1}{2} \frac{E_x}{G_{xx}} a^2 + \frac{1}{3} V_{xy} b^2 \right) x + V_{xy} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \sinh \frac{\pi n x}{b}}{\cosh \frac{\pi n x}{b}} \cos \frac{\pi n y}{b} \quad (9)$$

上式を (7) に代入して計算整理すると非常に簡単な形のせん断補正係数がえられる。

$$k = \frac{5 E_x}{6 E_x - G_{xx} V_{xx}} \quad (10)$$

(b) 楕円断面の場合: Fig. 3 のような断面形に対して同様の計算を行なうと、最終的に

$$k = \frac{6 \alpha (K^2 + 3 \beta)}{V_{xy} K^4 + (8 \alpha - 5 \beta V_{xy} - V_{xx}) K^2 + 20 \alpha \beta - 3 \beta V_{xx}}, \quad K = \frac{b}{a}, \quad \alpha = \frac{E_x}{G_{xx}}, \quad \beta = \frac{G_{yy}}{G_{xx}} \quad (11)$$

がえられる。

上記の \$k\$ に具体的な弾性定数の値を代入して計算した結果と

表示したものが Table 1 ~ 3 である。矩形断面に \$\chi\$ での結果

は大変すっきりした形で得られこゝこゝが注目される。

4. 固有値問題への適用例

[I] 直交異方性矩形板の座屈解析: 第 28 回 (昭和 49 年) の年次講演会に

おいで発表したが、そゝに現わせた Reissner のせん断補正係数としての \$5/6\$ の代りに (10) 式で与えられるものを用いて計算した。その結果 Bert-Change の計算したものとの差異は、異方性弾性定数 \$E_x, G_{xx}, V_{xx}\$ に依存するが、わずかなものとなった。その詳細は学会当日発表する。

[II] 各種の支持条件に対する異方性梁の座屈係数への影響:

Brunelle の研究に対して、上記で得られた \$k\$ を用いて、その変化状況を検討したが、詳細に \$\chi\$ まで省略する。

5. 結言

本文で与えられた結果の影響が顕著に現わける高次振動の問題への適用に \$\chi\$ には現在計算を行なっている。また、せん断補正係数の新しい定義に \$\chi\$ で提案した Y. W. Hsu の論文 (こゝは Cowper の論文で中央四角形断面において、\$V=0.0:0.857\$, \$V=0.5:0.900\$ と与えられるのに対し、\$V=0.0:0.857\$, \$V=0.5:1.420\$ とする) の関連性について現在検討中である。

参考文献: 1) Cowper, G. R., "The Shear Coefficient in Timoshenko's Beam Theory", J. Appl. Mech., (1966), pp. 335~340. 2) Cowper, G. R., "On the Accuracy of Timoshenko's Beam Theory" EH-Div, Proc. ASCE (1968), pp. 1447-1453. 3) Love, A. E. H., A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity" Cambridge (1926) p. 358. 4) 平島健一・桑原秀夫, "せん断変形を考慮した異方性平板の座屈解析" 第 29 回年次学術講演会概要集, I-118 (1974) pp. 251~252. 5) Brunelle, E. J., "Elastic Instability of Transversely Isotropic Timoshenko Beams", AIAA Jour., Vol. 8 (1970), pp. 2271~2273. 6) Hsu, Y. W., The Shear Coefficient of Beams of Circular Cross Section, Jour. Appl. Mech. (1978) pp. 216~218

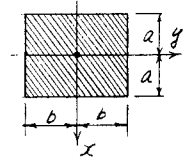


Fig. 2

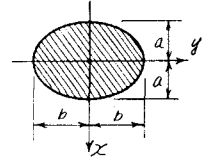


Fig. 3

Table 1. 直交異方性の矩形断面に対する \$k\$

\$V_{xx}/G_{xx}\$	0.00	0.10	0.20	0.30	0.40	0.50
0.25	0.833	0.893	0.962	1.043	1.141	1.250
0.50	"	0.862	0.893	0.926	0.962	1.000
1.00	"	0.847	0.862	0.877	0.893	0.909
2.00	"	0.840	0.847	0.855	0.862	0.870
5.00	"	0.836	0.839	0.842	0.845	0.847

Table 2. 楕円断面 (\$b/a=0.50\$) に対する \$k\$

\$G_{yy}/G_{xx}\$	0.25	0.50	1.00	2.00	5.00
0.25	0.984	1.024	1.051	1.067	1.077
0.50	0.916	0.944	0.962	0.972	0.979
1.00	0.886	0.908	0.923	0.931	0.936
2.00	0.871	0.891	0.904	0.911	0.916
5.00	0.863	0.881	0.893	0.900	0.905

Table 3. 楕円断面 (\$b/a=2.0\$) に対する \$k\$

\$G_{yy}/G_{xx}\$	0.25	0.50	1.00	2.00	5.00
0.25	0.654	0.750	0.937	1.293	2.227
0.50	0.707	0.767	0.868	1.014	1.245
1.00	0.737	0.776	0.837	0.915	1.020
2.00	0.753	0.781	0.822	0.872	0.935
5.00	0.763	0.784	0.813	0.848	0.891