I-8 材料の力学的不均一性の統計論的表現方法とその考察

東北大学工学部　正員　岸野佑次

1. はじめに

近来，材料の微視構造を考慮に入れた連続体力学の種々の研究がなされているが，[1,2] 究極的には実際の材料内部の力学的不均一性をどのように平均化するかという問題が残り，これに関する一般的理論体系は未だないように思われる。本文は力学的不均一性の平均化についての基礎的考察を行なったもので，先ず材料内各点を中心とする閉領域に対してなされる仕事に着目した平均化の方法について述べ，次に不均一性と材料の降伏などとの関連についての試論を示した。なお，本文では，主として，力学量の不均一性の統計論的分布特性が材料内各部で同一であり，巨視的に均一とみなし得る場合について考察を行なった。

2. 変形および応力の平均化

連続体力学における応力や歪はそのディメンションが示すように，何等かの平均化により定められた量である。これらの平均的量をテンソルとして表現する限りは平均化の方法もテンソル的に意味のあるものを用いる必要がある。（Eringenらの理論[1]はこの点の疑問が一部ある。）ここでは平均化を等方的に行なうために，平均化の領域を球R（半径 ρ，体積 V，表面積 S）に選び，これに対してなされる仕事を基にした平均化の方法を示す。

いま，材料内部に微小変位 $D\mathfrak{u}$ が生じたとすると，∂R 上の面分（単位法線ベクトル $\mathfrak{n}$）に作用している応力 $\underset{n}{\mathfrak{t}}$ が R に対してなす仕事は，単位体積当り

$$DW = \frac{1}{V}\oint_{\partial R} \underset{n}{\mathfrak{t}} \cdot D\mathfrak{u}\, da \tag{1}$$

で与えられる。$\underset{n}{\mathfrak{t}}$, $D\mathfrak{u}$ を応力テンソル σ，および歪テンソル（回転も含める）$D\gamma$ を用いて

$$\underset{n}{\mathfrak{t}} = \mathfrak{n}\cdot\sigma + \Delta\underset{n}{\mathfrak{t}} \tag{2}$$

$$D\mathfrak{u} = \mathfrak{r}\cdot D\gamma + \Delta(D\mathfrak{u}) \tag{3}$$

と表わし，σ, $D\gamma$ は平均化に際しては一定と考える。式中の記号 Δ は残差を表示するものとする。また，$\mathfrak{r}$ は球の中心を原点とする位置ベクトルである。DW の σ, $D\gamma$ によるエネルギー的な最良の近似は，残差部分のなす仕事

$$\Delta(DW) = \frac{1}{V}\oint_{\partial R} \Delta\underset{n}{\mathfrak{t}} \cdot \Delta(D\mathfrak{u})\, da \tag{4}$$

を最小にすることにより得られると考えられる。上式は

$$\Delta(DW) = \frac{1}{V}\oint_{\partial R} (\underset{n}{\mathfrak{t}} - \mathfrak{n}\cdot\sigma)\cdot(D\mathfrak{u} - \mathfrak{r}\cdot D\gamma)\, da \tag{5}$$

と変形され，右辺を σ, $D\gamma$ の各成分により偏微分した式を0に等置することにより次式を得る。

$$\sigma = \frac{1}{V}\oint_{\partial R} \mathfrak{r}\, \underset{n}{\mathfrak{t}}\, da \tag{6}$$

$$D\gamma = \frac{1}{V}\oint_{\partial R} \mathfrak{n}\, D\mathfrak{u}\, da \tag{7}$$

式(7)は $D\mathfrak{u}$ の $\mathfrak{r}\cdot D\gamma$ による最小二乗法的近似による結果[3]とも一致する。上に求めた σ, $D\gamma$ に対しては

$$DW = \sigma\cdot\cdot D\gamma + \Delta(DW) \tag{8}$$

が成立し，平均量と残差の間の仕事は0である。次にRの大きさと $\Delta(DW)$ との関係について述べる。力学量の不均一性の統計論的分布特性が材料内のどの部分をとっても同一であれば，平均的応力，歪が一様であるような場においては，積分 $\oint_{\partial R} \Delta\underset{n}{\mathfrak{t}}\cdot\Delta(D\mathfrak{u})\, da$ は面積 S に比例する量であると考えられる。従って $\Delta(DW)$ は ρ に反比例する量となる。一方，平均的量が巨視的勾配をもつような場においては σ, $D\gamma$ による近似の誤差は ρ が大きくなるにつれ大となり，従って $\Delta(DW)$ も大となる。これらのことから，一般に σ, $D\gamma$ による DW の最良の近似は，ある適当な大きさの半径 ρ をもつ球をとった場合に得られるものと考えられる。以下の考察では材料内各点での平均をとる領域の大きさは一定と考えることとする。

応力場が微視的に微分可能で連続な応力テンソル $\overset{*}{\sigma}$ により与えられる場合，式(6)より

$$\sigma = \frac{1}{V}\oint_{\partial R} \mathfrak{r}\,(\mathfrak{n}\cdot\overset{*}{\sigma})\, da$$
$$= \frac{1}{V}\int_R \overset{*}{\sigma}\, dv + \frac{1}{V}\int_R \mathfrak{r}\, \nabla\cdot\overset{*}{\sigma}\, dv \tag{9}$$

を得る。従って，$\nabla\cdot\overset{*}{\sigma} = 0$ ならば σ は $\overset{*}{\sigma}$ の R での平均値となっている。更に，次式を得る。

$$\nabla\cdot\sigma=\frac{1}{v}\int_R \nabla\cdot\overset{*}{\sigma}\,dv=0 \tag{10}$$

また，$D\mathfrak{u}$ が微視的に微分可能で連続な変位ベクトルである場合，式(7)より

$$\begin{aligned} D\gamma &= \frac{1}{v}\oint_{\partial R} n\, D\mathfrak{u}\, da \\ &= \nabla\left(\frac{1}{v}\int_R D\mathfrak{u}\, dv\right) \end{aligned} \tag{11}$$

となり、$D\gamma$ は上式中( )内で表わされる平均的変位ベクトルの微分により与えられ，適合条件を満す。しかし，$D\gamma$ は一般には不適合性を有する歪である。[3]

微視構造理論における変形の自由度は式(8)における $\Delta(D\mathfrak{u})$ に対応するものと解釈することが可能と思われる。また応力が一定のまま変形が進む塑性時に次のようなモーメントを考えると，これより通常の平均的力学では考慮されない量を得る。

$$D\mathfrak{m}=\frac{1}{v}\oint_{\partial R} \underset{n}{t}\times D\mathfrak{u}\,da=\sigma\cdot\times D\gamma+\Delta(D\mathfrak{m}) \tag{12}$$

ここに，

$$\Delta(D\mathfrak{m})=\frac{1}{v}\oint_{\partial R}\Delta\underset{n}{t}\times\Delta(D\mathfrak{u})\,da \tag{13}$$

式(12)の $D\mathfrak{m}$ は実際に R に対して生ずる全モーメントであり，これを0と置けば，平均量で示されるモーメント $\sigma\cdot\times D\gamma$ は $\Delta(D\mathfrak{m})$ が0でない限りは0とはならい。このことは微視的不均一性が無視できないような材料が塑性変形を受ける場合，応力テンソルと歪増分テンソルの主軸が一致するという St. Venant の仮定が成立しないこともあり得ることを示している。なお，$\Delta(D\mathfrak{m})$ が偶応力に起因して生ずると考えて材料のモデル化を行なうと，降伏現象を固有値問題として捉える理論[4]を導びくことができる。

3. 降伏条件についての考察

材料の降伏条件は均質な材料と不均質な材料とでは異なったものになると考えられるが，ここでは，力学的不均一性が降伏条件に与える影響について考察する。

von Mises の条件式は偏差応力テンソル

$$\sigma'=\sigma-pI \tag{14}$$

(p は平均応力，I は単位テンソル)

を用いれば，

$$\sigma'\cdot\cdot\sigma'=k^2 \quad (k^2\text{ は定数}) \tag{15}$$

と表わされる。上式より，∂R 上の面分に作用する不均一な応力作用下での降伏条件式は，定数を K^2 として

$$\frac{1}{S}\oint_{\partial R}(\underset{n}{t}-pn)\cdot(\underset{n}{t}-pn)\,da=K^2 \tag{16}$$

のように置くことができると考えられる。通常，降伏条件式は外力の作用していない状態を原点にとった応力テンソルによって与えられるが，一般の不均質材料においては，外力の作用がない状態においても初期応力が存在すると考えられるので，$\underset{n}{t}$，p をそれぞれ次式のように分解して考察を進める。

$$\underset{n}{t}=n\cdot(\sigma_0+\sigma)+\Delta\underset{n}{t}_0+\Delta\underset{n}{t} \tag{17}$$

$$p=\frac{1}{3}I\cdot\cdot(\sigma_0+\sigma) \tag{18}$$

ここに，添字0は初期応力に関係する量を表わすものとする。式(17)，(18)を式(16)に代入して変形すると

$$\frac{1}{3}(\sigma_0'\cdot\cdot\sigma_0'+2\sigma_0'\cdot\cdot\sigma'+\sigma'\cdot\cdot\sigma') + \frac{1}{S}\oint_{\partial R}(\Delta\underset{n}{t}_0\cdot\Delta\underset{n}{t}_0+2\Delta\underset{n}{t}_0\cdot\Delta\underset{n}{t}+\Delta\underset{n}{t}\cdot\Delta\underset{n}{t})\,da=K^2 \tag{19}$$

を得る。以下，初期状態において $\sigma_0'=0$ (但し，$\Delta\underset{n}{t}_0\neq 0$) となるような簡単な例について考察する。

ここで，次の2つの仮定を設ける。

(仮定1) $\Delta\underset{n}{t}$ は，平均的に，初期状態に存在する応力の不均一性を $p>0$ (引張)においては増大させ，$p<0$ (圧縮)においては減少させる方向に働く。

(仮定2) $\Delta\underset{n}{t}\cdot\Delta\underset{n}{t}$ は，平均的に，$\sigma\cdot\cdot\sigma$ と共に増大する。

これらの仮定を基に

$$\frac{1}{S}\oint_{\partial R}\Delta\underset{n}{t}_0\cdot\Delta\underset{n}{t}\,da \propto p \tag{20}$$

$$\frac{1}{S}\oint_{\partial R}\Delta\underset{n}{t}\cdot\Delta\underset{n}{t}\,da \propto \sigma\cdot\cdot\sigma \tag{21}$$

と置くと，次式を得る。

$$\sigma'\cdot\cdot\sigma'=A-Bp-Cp^2 \tag{22}$$

(A,B,C はいずれも材料固有の正の定数)

なお，初期状態の不均一性の度合が大きい程，積分 $\oint_{\partial R}\Delta\underset{n}{t}_0\cdot\Delta\underset{n}{t}_0\,da$ が大となるため A は小さな値となる。式(22)で，特に $B=C=0$ と置くと，von Mises の式(15)が得られる。また，$C=0$ の場合，2次元状態に対して，Griffith の条件式と同型となる。

参考文献

1) Eringen, A.C. et al.; Int. J. Eng. Sci. 2 (1964) P.189

2) Kondo, K.; RAAG Memoirs, 1 (1955) P.470

3) 岸野；第30回年次学術講演会概要集 I (1975) P.9

4) Kishino, Y.; Tech. Rep. Tohoku Univ. 37 (1972) P.61