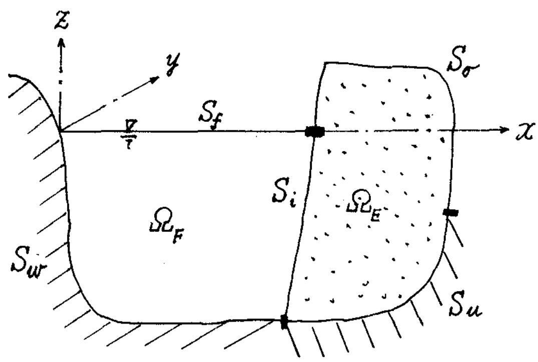
I-6　流力弾性振動の変分原理について

川崎重工業(株)　正員　坂井藤一

流力弾性振動は流体と弾性体構造物が接触し、相互に影響を及ぼしながら運動する現象である。流力弾性振動は大別して空力弾性学と水力弾性学を含むものである。ここで取扱うのは、主として後者の問題であり、水理・海洋構造物や貯液タンクなどの土木構造物、あるいは船体・化学プラント・ロケット燃料タンクなどの設計上重要な位置を占めるものである。一般に流力弾性振動は、その複雑さの故に特別な場合を除いて厳密解を得ることは難かしい。したがって、変分原理の適用によって近似的に解析を行なうことが非常に有効である。その意味でも変分原理の確立は重要である。

流体力学に対する変分原理は、固体力学のそれに比べてかなり遅れて展開された。Navier-Stokes方程式の変分原理が論じられたのは、極めて近年のことである。本研究では、完全流体の変分原理を先に著者の示した停留二乗変分原理[1]の立場から統一的に展開できることを示し、その延長として流力弾性振動の変分原理を誘導する。後述する変分原理はその一部であるが、従来部分的に適用されてきたエネルギー原理などよりも一般性があるので、より広範な問題に有用である。なお、応用については、当日の発表に譲る。



たとえば、上図のような弾性体Ω_Eと流体Ω_Fの振動問題を考える(微小運動で線形化可能とする)。

弾性体については、

$$\sigma_{ij,j} + \bar{X}_i = m\ddot{u}_i \quad \text{in } \Omega_E \qquad (1)$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \quad \text{in } \Omega_E \qquad (2)$$

$$\sigma = A \cdot \varepsilon \quad \text{in } \Omega_E \qquad (3)$$

$$n_j \sigma_{ij} = \bar{T}_i \quad \text{on } S_\sigma \qquad (4)$$

$$u_i = \bar{u}_i \quad \text{on } S_u \qquad (5)$$

流体(非圧縮性・非回転)については、

$$\nabla^2 \phi = 0 \quad \text{in } \Omega_F \qquad (6)$$

$$\phi_{,n} = 0 \quad \text{on } S_w \qquad (7)$$

$$\ddot{\phi} + g\phi_{,z} = 0 \quad \text{on } S_f \qquad (8)$$

流体ー弾性体の境界面においては、

$$\phi_{,n} = n_i \dot{u}_i \quad \text{on } S_i \qquad (9)$$

$$\rho\dot{\phi} = n_i n_j \sigma_{ij} \quad \text{on } S_i \qquad (10)$$

これに対して次の変分汎関数が存在する。

$$J = \int_{t_0}^{t_1} (T - V)\, dt \qquad (11)$$

$$T = -\frac{\rho}{2}\int_{\Omega_F} (\nabla\phi)^2 d\Omega + \frac{\rho}{2g}\int_{S_f} \dot{\phi}^2 dS + \rho\int_{S_i} n_i \dot{u}_i \phi\, dS + \frac{1}{2}\int_{\Omega_E} m\dot{u}_i \dot{u}_i\, d\Omega \qquad (12)$$

$$V = \frac{1}{2}\int_{\Omega_E} \varepsilon^t A\, \varepsilon\, d\Omega \qquad (13)$$

このような汎関数Jに対してHamilton原理が成立する。この場合流体はLagrange流の取扱いがなされており、その基礎的な考え方はHerivel[2]によって確立されたものである。

著者らは、上記の原理を貯液タンクの振動や浮体の振動の解析に適用して良い結果を得ている。

[1] 坂井藤一：力学における変分原理の一般化について、土木学会論文報告集、第249号、1976-5

[2] Herivel, J. W. : The Derivation of the Equations of Motion of an Ideal Fluid by Hamilton Principle, Proc. Camb. Phil. Soc., 51, 344 (1955)