I-5　変分原理によるウェイト・マトリックス法の考察

東北大学工学部　正員　○新関　茂
東北大学工学部　正員　佐武正雄

1. まえがき

構造解析において厳密解を求めるのが困難な場合，連続な場の性質を有限個の離散点で代表させて，数値的に解析するマトリックス解析法が用いられることが多い。この場合，力学的な場の離散化にともない，連続的に分布する荷重や反力は，その離散点での値または分布力と等価な集中力に置き換えて取り扱われることになる。板の固定辺の反力などのように，本来分布力であるものが離散化して解析したため，離散点での集中反力として求められた場合，この集中力を合理的な分布力に置換することが必要となってくる。また，変位型の有限要素モデルでは，分布荷重は等価節点力（集中力）に置き換えられ，要素間で伝達される力は全て集中力である。

分布力をある力学量に関して，等価な集中力に置換する作用素をウェイト・マトリックス，同様にこの逆の置換を行う作用素を逆ウェイト・マトリックスと称し，これらのウェイト・マトリックスおよび逆ウェイト・マトリックスを用いて応力分布などの解析を行う方法をウェイト・マトリックス法と呼ぶことにする[1,2]。本文では，3次元弾性体の有限要素解析に，ウェイト・マトリックス法を応用して求めた応力場のもつ数学的意味を変分原理を用いて考察する。

2. ウェイト・マトリックス法で解析した応力場の変分原理による考察

3次元弾性体のポテンシャル・エネルギー最小の原理で定式化した有限要素モデルによる解析に，ウェイト・マトリックス法を応用して求めた応力場の数学的意味をA^*A形式の微分作用素の性質[3-5]を利用し考察する。代表的要素eのしめる領域をR_eとし，RはR_eの和集合とする。R内の点$\mathbb{X}=(x_1, x_2, x_3)$における変位ベクトル$\mathbb{u}$，歪ベクトル$\boldsymbol{\varepsilon}$および応力ベクトル$\boldsymbol{\sigma}$をそれぞれ式(1),(2),(3)のように表わし，$\partial/\partial x_i = \partial_i$として微分作用素$\mathbb{A}$を式(4)で定義すれば，平衡条件および歪と変位の関係はそれぞれ式(5),(6)によって記される。ここに，$\boldsymbol{f}$は物体力であり，また$\mathbb{A}^*$は$\mathbb{A}$の共役作用素でベクトル関数$\mathbb{u}$，$\mathbb{v}$の内積を式(7)によって定義すれば，式(8)が成立し，特に今の場合には$\mathbb{A}^*=-{}^t\mathbb{A}$の関係がある。弾性係数マトリックスを$\mathbb{D}$とすれば，応力$\boldsymbol{\sigma}$と歪$\boldsymbol{\varepsilon}$の間には式(9)の関係があるので，3次元弾性体の基礎微分方程式は式(5),(6),(9)により，式(10)によって表現される。ただし，$\mathbb{L}$は式(11)で定義される自己共役作用素で，式(12)の関係を満足する。今，$\mathbb{u}$を許容関数とすれば，微分方程式(10)に対する汎関数$J[\mathbb{u}]$は式(13)によって表現されるが，正解を$\bar{\mathbb{u}}$とすれば，式(8)および(12)を用いることにより，式(14)に示されるように変形することができ，更に容易に式(15)(16)のように書き換えることができる。式(15)はHermann[6]が，ここで述べた方法と異なる方法で導いたものと同一の式である。$J[\mathbb{u}]$は，ポテンシャル・エネルギーであるから，力学的平衡点では，その才1変分は0となら

$$\mathbb{u} = {}^t(u_1, u_2, u_3) \tag{1}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = {}^t(\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{33}, \varepsilon_{12}, \varepsilon_{23}, \varepsilon_{31}) \tag{2}$$

$$\boldsymbol{\sigma} = {}^t(\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}, \sigma_{12}, \sigma_{23}, \sigma_{31}) \tag{3}$$

$$\mathbb{A} = {}^t\begin{bmatrix} \partial_1 & 0 & 0 & \partial_2 & 0 & \partial_3 \\ 0 & \partial_2 & 0 & \partial_1 & \partial_3 & 0 \\ 0 & 0 & \partial_3 & 0 & \partial_2 & \partial_1 \end{bmatrix} \tag{4}$$

$$\mathbb{A}^*\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{f} = 0 \tag{5}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbb{A}\mathbb{u} \tag{6}$$

$$\langle \mathbb{u}, \mathbb{v} \rangle = \int {}^t\mathbb{u}\,\mathbb{v}\,dR \tag{7}$$

$$\langle \mathbb{A}\mathbb{u}, \mathbb{v} \rangle = \langle \mathbb{u}, \mathbb{A}^*\mathbb{v} \rangle \tag{8}$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbb{D}\boldsymbol{\varepsilon} \tag{9}$$

$$\mathbb{L}\mathbb{u} - \boldsymbol{f} = 0 \tag{10}$$

$$\mathbb{L} = \mathbb{A}^*\mathbb{D}\mathbb{A} \tag{11}$$

$$\langle \mathbb{L}\mathbb{u}, \mathbb{v} \rangle = \langle \mathbb{u}, \mathbb{L}\mathbb{v} \rangle \tag{12}$$

$$J[\mathbb{u}] = \frac{1}{2}\langle \mathbb{L}\mathbb{u}, \mathbb{u} \rangle - \langle \boldsymbol{f}, \mathbb{u} \rangle \tag{13}$$

$$= \frac{1}{2}\langle \mathbb{A}(\mathbb{u}-\bar{\mathbb{u}}), \mathbb{D}\mathbb{A}(\mathbb{u}-\bar{\mathbb{u}}) \rangle - \frac{1}{2}\langle \mathbb{A}\bar{\mathbb{u}}, \mathbb{D}\mathbb{A}\bar{\mathbb{u}} \rangle \tag{14}$$

$$= \frac{1}{2}\langle \boldsymbol{\sigma}-\bar{\boldsymbol{\sigma}}, \boldsymbol{\varepsilon}-\bar{\boldsymbol{\varepsilon}} \rangle - \frac{1}{2}\langle \bar{\boldsymbol{\sigma}}, \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} \rangle \tag{15}$$

$$= \frac{1}{2}\int_{R_e} {}^t(\boldsymbol{\sigma}-\bar{\boldsymbol{\sigma}})\mathbb{D}^{-1}(\boldsymbol{\sigma}-\bar{\boldsymbol{\sigma}})\,dR - \frac{1}{2}\int_{R_e} {}^t\bar{\boldsymbol{\sigma}}\mathbb{D}^{-1}\bar{\boldsymbol{\sigma}}\,dR \tag{16}$$

なければならない．正解Ūに関する力学量は定まった関数と考え，式(15)の第1変分をとりガウス―グリーンの定理を用いれば，式(17)または式(18)を得る．$\bar{T}_i$およびT_iは∂R上の単位法線ベクトルn_iを用いることにより$\bar{\sigma}_{ij}$，σ_{ij}とそれぞれ式(19)，(20)で関係づけられる．したがって，要素の和集合Rに対して式(18)から式(21)が成り立つ．要素eの形状関数$u_i(x)$を式(22)に示すように同一の補間関数を用いて近似し，$\delta u_i \neq 0$，$\bar{\sigma}_{ij}$は連続であるものとすれば，R内の隣接要素の共通境界上では$\oint_{\partial R_e} \bar{\sigma}_{ij} n_j \psi_\alpha^{(e)} dS$は，互いに打ち消し合い，式(21)よりRの節点αでは式(23)が成立する．ここに，$P_{i\alpha}$は要素の節点間で伝達される節点力（これを修正節点力と呼ぶことにする）である．式(23)は$P_{i\alpha}$と正解$\bar{\sigma}_{ij}$との関係を表わしていると考えられる．要素の集合Rの節点αに関する大域的補間関数$\chi_\alpha(x)$を用いれば，式(23)は式(24)のように書きかえられる．要素集合の境界∂Rにおいて$\bar{T}_i$を式(25)のように近似し，式(24)に代入すれば，式(26)を得る．ここに$W_{\alpha\beta}$は式(27)によって与えられるウェイト・マトリックスで，等価量は仕事である.[1] 式(24)，(26)，(27)の関係は$\bar{T}_i$の最小二乗近似である式(28)から得られる関係に等価なものとなっている．したがって，有限要素解析に変位の補間関数を用いて導びいた逆ウェイト・マトリックスを応用し，修正節点力$P_{i\alpha}$から求めた応力場は正解の最小二乗近似としての意味を有している．

$$0 = \delta J[u]$$

$$= \oint_{\partial R_e} {}^t(\delta u)(T - \bar{T})dS + \int_{R_e} {}^t(\delta u)(f - \bar{f})dR \qquad (17)$$

$$= \oint_{\partial R_e} \delta u_i (T_i - \bar{T}_i)dS + \int_{R_e} \delta u_i (f_i - \bar{f}_i)dR \qquad (18)$$

$$\bar{T}_i = \bar{\sigma}_{ij} n_j \qquad (19)$$

$$T_i = \sigma_{ij} n_j \qquad (20)$$

$$\sum_e \left[\oint_{\partial R_e} \delta u_i (T_i - \bar{T}_i)\, dS + \int_{R_e} \delta u_i (f_i - \bar{f}_i) dR \right] = 0 \qquad (21)$$

$$u_i(x) = u_{i\alpha} \psi_\alpha^{(e)}(x) \qquad (22)$$

$$P_{i\alpha} = \sum_e \left[\oint_{\partial R} T_i \psi_\alpha^{(e)} dS + \int_{R_e} (f_i - \bar{f}_i) \psi_\alpha^{(e)} dR \right]$$

$$= \sum_e \left[\oint_{\partial R} \bar{T}_i \psi_\alpha^{(e)} dS \right] \qquad (23)$$

$$P_{i\alpha} = \oint_{\partial R} \bar{T}_i \chi_\alpha(x) dS \qquad (24)$$

$$\bar{T}_i = \hat{T}_{i\alpha} \chi_\alpha \qquad (25)$$

$$P_{i\alpha} = W_{\alpha\beta} \hat{T}_{i\beta} \qquad (26)$$

$$W_{\alpha\beta} = \oint_{\partial R} \chi_\alpha \chi_\beta dR \qquad (27)$$

$$\oint_{\partial R} (\bar{T}_i - \hat{T}_{i\alpha} \chi_\alpha)^2 dR = min. \qquad (28)$$

3．あとがき

共役または自己共役微分作用素の性質を用いて，ポテンシャル・エネルギーを正解と近似解の差の形式に表現し，その第1変分をとることによって，ポテンシャル・エネルギー最小の原理によって定式化された有限要素モデルによる3次元弾性体の解析に，ウェイト・マトリックス法を応用して求めた応力場は要素集合の境界上で正解の最小二乗近似としての意味を有することを示した．同様な考察は板などの有限要素解析にも応用することができる．

棒や梁の場合，要素間で伝達される修正節点力から求めた節点での軸力，モーメント，せん断力は正解に一致することを上記と同様にして説明することが可能であり，これはウェイト・マトリックス法の特殊な場合に相当していると考えることができる．また，Odenの共役射影理論とウェイト・マトリックス法との間には密接な関係がある[1]が，Odenのconsistentな応力場は，式(16)によって要素ごとに弾性定数をウェイトとして最小二乗近似した不連続な応力場を基礎としているのに対し，ウェイト・マトリックス法では修正節点力を利用している点で異なっている．

参考文献

1) Niiseki,S.& Satake,M. : Some Applications of Topological Consideration and Weight-Matrix Method to Finite Element Analysis, Theory and Practice in Finite Element Structural Analysis, ed. by Y.Yamada & R.H.Gallagher, University of Tokvo Press,pp.61-73,1973
2) 新関 茂，佐武正雄：ウェイト・マトリックス法の構造解析への応用とその考察，土木学会論文報告集 投稿中
3) von Neumann,J. : Über Adjungierte Funktionaloperatoren,Ann.,Math.,33,pp.294-310,1932
4) Fujita,H. : Contribution to the Theory of Upper and Lower Bounds in Boundary Value Problems, J. Phys .Soc.Japan 10,pp.1-8 ,1955
5) Oden,J.T.& Reddy,J.R. : On Dual-Complementary Variational Principles in Mathematical Physics,Int.J.Eng.Sci.,vol.12,pp.1-29,1974
6) Herrmann,L.R.: Interpretation of Finite Element Procedure as Stress Error Minimization Procedure,ASCE,EM.98,pp.1330-1335,1972