I-4　　２段階ラックス・ウェンドロフ有限要素法の収束性について

中央大学大学院　学生員　○竹内　則雄
中央大学理工学部　正員　　川原　睦人

1. 緒言

有限要素法により双曲型偏微分方程式を解く方法として，次の２つの考え方がある。すなわち，一つは連立方程式を解くことによって解を求める陰的な解法で，もう一つはそれを解かないで解を求める陽的な解法である。前者は精度や安定性の面ですぐれているといわれているが，双曲型の偏微分方程式の場合，計算時間などの面からみて，むしろ後者の陽的な解法の方が適しているといえよう。著者ら［1］は陽的な解法として，ラックス・ウェンドロフ法に基ずく方法を提案した。この方法は，時間に関する２階微分を含む項が生じ，これを潮流解析のような，非線型双曲型方程式に適用した場合，非常に繁雑な方程式となり，この項の計算時間が多く必要とする。そこで，このような問題に対処するため，この方法を２段階に分けて解析する，２段階ラックス・ウェンドロフ法に基ずく有限要素法を展開し，その収束性を検討したので，ここに報告する。

2. 基礎方程式

次の線型双曲型偏微分方程式を考える。

$$\frac{\partial u(x)}{\partial t}+\sum_{i=1}^{P} b_i(x)u_{,i}(x)=0 \qquad x\in\Omega\subset R^P \;,\; 0<t\leq T \;,\; 1\leq P\leq 3 \tag{1}$$

ここにΩは，境界$\partial\Omega$を持つ有界領域とし，解$u(x)\in C^0(\bar{\Omega}\times(0,T])$は，

$$u(x,t)=0 \qquad x\in\partial\Omega \qquad 0<t\leq T \tag{2}$$

$$u(x,0)=u^0(x) \qquad x\in\Omega \tag{3}$$

を満足するものとする。$C_0^\infty(\Omega)$の$\|\cdot\|_{H_0^1(\Omega)}\equiv\sum_{i=1}^{P}\|\frac{\partial\cdot}{\partial x_i}\|_{L^2(\Omega)}$に対する完備化を$H_0^1(\Omega)$とするとき，次の弱解が定義される。

$$\left\langle\frac{\partial u}{\partial t},v\right\rangle+\left\langle\sum_{i=1}^{P} b_i u_{,i},v\right\rangle=0 \qquad v\in H_0^1(\Omega) \qquad t\in(0,T] \tag{4}$$

$$u(x,t)\in H_0^1(\Omega) \quad , \quad \langle u(\cdot,0),v\rangle=\langle u^0,v\rangle \quad , \quad v\in H_0^1(\Omega) \tag{5}$$

ここに，$\langle u,v\rangle=\int_\Omega (uv)\,d\Omega$　で，解については適当ななめらかさを仮定しておく。

補助定理１．Δtを微小増分時間とするとき，次の関係が成り立つ。

$$\left\langle\frac{u^{n+1/2}-u^n}{(\frac{\Delta t}{2})},v\right\rangle+\langle b_i u_{,i}^n,v\rangle=\left\langle\frac{\rho}{(\frac{\Delta t}{2})},v\right\rangle \qquad |\rho|<C_1(\Delta t)^2 \tag{6}$$

$$\left\langle\frac{u^{n+1}-u^n}{\Delta t},v\right\rangle+\langle b_i u_{,i}^{n+1/2},v\rangle=\left\langle\frac{\varepsilon}{\Delta t},v\right\rangle \qquad |\varepsilon|<C_2(\Delta t)^3 \tag{7}$$

ここに，$u^n=u(n\Delta t)$である。

3. ２段階ラックス・ウェンドロフ有限要素法

$\{\Phi_\alpha\}_{\alpha=1}^{M}$ではられる有限次元空間$S_M\subset H_0^1(\Omega)$の元を用いて，$t=n\Delta t$における関数を$W^n$と表わせば，

$$W^n(x)=\sum_{\alpha=1}^{M}\Phi_\alpha(x)C_\alpha^n \qquad x\in\Omega \tag{8}$$

である。次の条件を満足する$W^n(x)\in S_M$を2段階ラックス・ウェンドロフ有限要素法解と呼ぶ。

$$\langle \tilde{W}^{n+1/2}, V\rangle = \langle W^n, V\rangle - \frac{\Delta t}{2}\langle \sum_{i=1}^{p} b_i W^n_{,i}, V\rangle \tag{9}$$

$$\langle W^{n+1}, V\rangle = \langle W^n, V\rangle - \Delta t\langle \sum_{i=1}^{p} b_i \tilde{W}^{n+1/2}_{,i}, V\rangle \tag{10}$$

$$\forall\ V\in S_M\subset H_0^1(\Omega)$$

$$\langle W^0, V\rangle = \langle U^0, V\rangle \quad ,\ \forall\ V\in S_M \tag{11}$$

(8)式～(10)式により，次の解式が得られる。

$$\bar{A}\tilde{C}^{n+1/2} = AC^n - \frac{\Delta t}{2}BC^n \tag{12}$$

$$\bar{A}C^{n+1} = AC^n - \Delta t\, B\tilde{C}^{n+1/2} \tag{13}$$

$$\left(\begin{array}{l} A=\langle \Phi_\alpha, \Phi_\beta\rangle,\ \bar{A}=\langle \bar{\Phi}_\alpha, \bar{\Phi}_\beta\rangle \\ B=\langle \sum_{i=1}^{p} b_i\Phi_{\alpha,i}, \Phi_\beta\rangle \end{array}\right)$$

ここで，左辺の係数行列$\bar{A}$は質量行列Aの集中行列である。この結果，第n回目のC^nが求まれば，第$n+1$回目のC^{n+1}をただちに計算できる完全に陽的な解公式となっている。

4．2段階ラックス・ウェンドロフ有限要素法の収束

Uの補間U_Iを次の関係を満足する関数とする。

$$U_I = \sum_{\alpha=1}^{M}\Phi_\alpha(x)C_{I\alpha} \quad ,\ U_I(x)=0\ \forall\ x\in\partial\Omega \tag{14}$$

補助定理2．有限要素法の直径をhとすると次の関係が成り立つ。

$$\| U-U_I\|_{L_2(\Omega)} \leqq Kh^2\| U\|_{H^2(\Omega)} \tag{15}$$

$$\| U-U_I\|_{H^1(\Omega)} \leqq Kh\| U\|_{H^2(\Omega)} \tag{16}$$

補助定理3．$\bar{\xi}^n=\bar{W}_I^n-\bar{W}^n$，$\xi^n=W_I^n-W^n$，$\xi_I^n=U^n-W_I^n$とすると次の関係が成り立つ。

$$\begin{aligned}\|\bar{\xi}^{n+1/2}\|^2_{L_2(\Omega)}-\|\xi^n\|^2_{L_2(\Omega)} \leqq{}& C_1\|\bar{W}_I^{n+1/2}-U^{n+1/2}\|^2_{L_2(\Omega)}+C_2\|\bar{\xi}^{n+1/2}\|^2_{L_2(\Omega)}+C_3\|\xi^n\|^2_{L_2(\Omega)}\\ &+C_4\|\xi^n\|^2_{L_2(\Omega)}+\Delta t\, C_5\|\bar{\xi}^n\|^2_{H_0^1(\Omega)}+C_6(\Delta t)^4\end{aligned} \tag{17}$$

$$\begin{aligned}\|\xi^{n+1}\|^2_{L_2(\Omega)} \leqq{}& C_1\|\xi^n\|^2_{L_2(\Omega)}+C_2\|\xi^{n+1/2}\|^2_{L_2(\Omega)}+C_3\|\bar{W}_I^{n+1}-U^{n+1}\|_{L_2(\Omega)}+C_4\|\bar{\xi}^{n+1}\|^2_{L_2(\Omega)}\\ &+C_5\|\xi_I^n\|^2_{L_2(\Omega)}+\Delta t\ C_6\|\xi_I^{n+1/2}\|^2_{H_0^1(\Omega)}+C_7\Delta t^4\end{aligned} \tag{18}$$

定理　$\Delta t=\lambda h$とすれば(12)式(13)式による有限要素解は，(4)の弱解に収束する。

5．結言

双曲型の偏微分方程式を解く方法として，差分法における2段階ラックス・ウェンドロフ法を基礎とする，2段階ラックスウェンドロフ有限要素法を提案した。この場合，時間きざみΔtを空間きざみhのオーダーで分割すれば，$h\to 0$に対して，正解に収束することを示すことができる。ここで提案した方法は，潮流，津波などの方程式に対する応用が可能である。

参考文献

1）川原睦人・竹内則雄：双曲型偏微分方程式に対する一有限要素法解析，第30回年次学術講演会講演概要集，1975．