I-3　図式帯幅減少法の数学的基盤について

京都大学工学部　正員　谷口健男
京都大学工学部　正員　白石成人

1．まえがき

一般に構造剛性行列は帯行列となり，最小帯幅値は系の位相幾何学的特性により確定しているにもかかわらず，現実にはlabelingの不備により得られた値は最小値とならず，かつその結果の良否は系の形状により大きく支配されている。筆者らは，その欠点を改良すべく図式帯幅減少法を提案したが，それに関する一連の研究においては主として手法自体を取り扱い，その手法の基礎となっている座標系（Filing Fieldと呼ばれる）に関する考察は行なわれないままになっている。特に，①．いかなる構造系に対しても，その手法が有効である．②．最適labelingと一致する図形を座標系が許容する．③．座標系内に画かれた図形の高さが帯幅値と一義的に関連づけられる，という3点が証明されない限り，図式手法の正当性が確認されたとは云えない。これら諸点はまさしく提案されたFiling Fieldの特性によるものであり，本研究においては上の諸点の証明を最大の目的とし，さらに，副次的に得られたいくつかの数学的結果についても考察を加える。なお，紙面の都合により証明は全て省略する。

2．図式帯幅減少法とFiling Field[1),2)]

図式帯幅減少法とは与えられた構造物の構造特性をあらわすグラフを，帯幅値の明白な図形に元の節点間接続を保持したまま画き直し，その新しい図形でもって最小帯幅値をさぐろうとする手法である。元の図形と新しい図形は互に"同型（isomorphic）"であることは明白である。その新しい図形が画かれる"場"がFiling Fieldと呼ばれる一つの座標系であり，それは次のようなものである。

a．二次元面が縦・横等間隔に区切られ，その交点にグラフの1点が配置される。

b．座標内で許される線分は同一，もしくは相隣る点列内2点間を接続するものであり，かつその線分の許容方向としては，上・下・右・左・右下がり・左上りに限られる。

c．節点番号は座標系に設定されており，図形が画かれると同時に番号順序は一義的に定まる。その順序は最右側点列より順次左方へ，また同一点列内においては上方より下方に順次 $1, 2, \cdots, n$ とlabelされる。

この座標系の縦座標が画かれた図形の帯幅値と一義的に関係づけられるということより，帯幅減少法は元の図形と同型な諸図形のうち，その高さが最小であるようなものをさがすという操作に置換されたことになる。これはとりもなおさず，図形の画き方にほかならない。

3．座標系に関する考察

与えられた系の特性を表わすグラフを $G(n, m)$ とする。ここで n, m は各々節点数，部材数をあらわす。ここで与えるグラフは連結グラフ（0ベッティ数 = 1）に限る。0ベッティ数 ≥ 2 の時は，グラフは非連結であり，個々の独立グラフについて別個に考えればよい。以下の文章において，構造物のかわりに，グラフ：Gの取り扱いですませるが，Gは剛性行列を直接グラフ表現したものであり，帯幅減少の問題に関しては，その物理量は問題でなく，接続だけが意味をなし，よってグラフを取り扱うだけで十分であるとの理由によるものである。

［理論 1］　いかなるグラフも，この座標内に表現されうる。　（証明 略）

理論1は，図式帯幅減少法がいかなる構造系に対しても適用が可能である，すなわち汎用性をもつ保障として重要である。つぎに，ある任意グラフ $G(n, m)$ に限って考えた時，$G(n, m)$ に対しその異なる節点番号順序は $n!$ 個あることは明らかである。また，それらのうち少くとも2つが最適節点番号順序であり，一般には数多くの最適解が存在する。よって，$G(n, m)$ を対象とした時，この座標系について次の理論が必要となる。

[理論 2]　$G(n, m)$が与えられたとき、$n!$個の節点番号順序を表現する$n!$個の互に相異なる図形が座標内に画かれうる。　（証明 略）

ここで互に相異なる図形とは、もし$G(n, m)$の個々の節点が識別されうる場合、それらの順序が異なるという意味であり、それを表わす図形は、もちろん元の図形と同型でなければならない。1つの節点番号順序に対応する図形は1つとは限らず、一般に複数個存在する。それらは座標系の1～α個の点列を用いて表現されることになる。ここでαの値はlabelingされた$G(n, m)$について、その1～nとlabelされた個々の点間の距離$d(i, j)$ $(i, j = 1, 2, \cdots, n)$によって定まる値であり、例えば完全グラフの場合、$\alpha = 2$。しかしながらこれらの諸図形は座標系に付加されている諸条件下において、その番号順序を入れ換えることなく互に一致させることが可能であり、よってそれらを全て同一図形とみなせる。よって最終的には$n!$個の相異なる図形しか存在しなくなる。それらのうちの少くとも1つが最適図形である。また、以上の考察より最終的に得られる$n!$個の図形は、その図形を構成する相隣る点列間に少くとも1本の水平方向線分を導入することを可能ならしめる。

[理論 3]　Filling Field内に画かれた図形の全ての点列中には空点が存在しない。もし存在しても、節点番号順序を変化させることなくそれらを埋めることが可能である。　（証明 略）

[定義]　Filling Field内の相隣る2点列の左側点列最上点と左側点列最下点との縦座標差を"相対高さ(Relative Height)"*と呼ぶ。　*: Pair heightともいう。(S51. 土木学会関西支部年講. I-26)

この定義を用いて、画かれた図形と帯幅値との関係が次のように求まる。

[理論 4]　Filling Field内に画かれた図形において、その最大節点番号差はその図形の最大相対高さに一致し、その値をもつ点はその相対高さを構成する2点列内の諸点のうち右側点列内に位置し、かつ左側点列との間で水平接続をもつ点である。　（証明 略）

この結果は最も重要なものである。すなわち元と同型な図形の縦座標値(Relative Height)が、番号差もしくは帯幅値と一義的に関係づけられたわけである。この理論より次の理論が導かれる。

[理論 5]　帯幅減少法はFilling Field内に、いかにその最大相対高さを小さく画くかという図形の画き方と等価である。

この理論は、すでに提案されている図式帯幅減少法の基本戦略にほかならない。

図形をその高さを低く画くためには図形をなるべく水平方向に引っぱった形、すなわち、できるかぎり多くの点列にわたるように点を配置すべきであることは云うまでもないことである。[理論2]の考察において、labelされた$G(n, m)$は最大α行の点列にわたることが示された。同一グラフについてαの最大値は直径d_0を超えない。　$\alpha \leq d_0$.　よってこれより、$G(n, m)$のn個の点を(d_0+1)行にわたるように配置するのがこの手法の一つの手がかりとなる。そのように図形を画くには$G(n, m)$の全ての2点間の距離$d(i, j)$に注意しなければならないことはもちろんである。特に$d(1, n) = d_0$。また、任意グラフの直径は容易には求められない。その一つの方法として次のようなものが考えられる[3]。$G(n, m)$の節点間接続行列をAとする。$A(i, i) = 0$.

$$\bar{A}_{d_0} = A + A^2 + A^3 + \cdots\cdots + A^{d_0}$$

$\bar{A}_{d_0-1}$において零要素が存在し、$\bar{A}_{d_0}$において始めて全ての要素が非零となったとすると、d_0が$G(n, m)$の直径であり、その直径の両端点は最後に非零となった要素$\bar{A}(i, j)$より、i、j両点であることがわかる。

4. あとがき

本研究において、図式帯幅減少法の正当性の証明を行い、かつ、その手法の基本的戦略となっている系の長手方向(直径方向)が上記証明の過程で浮びあがってくることも示した。本研究を行うに際して中部工業大学小西一郎教授の御指導を受けたことに対し、ここに感謝の意を表します。

参考文献. 1). T. Taniguchi, "Application of Topology to Bandwidth Reduction Method of Structural Stiffness Matrix," Doctor Dissertation to Kyoto Univ., 1974, 2). I. Konishi et al, "Reducing the Bandwidth of Structural Stiffness Matrices," Journal of Structural Mechanics, Vol. 4, No. 2, 1976, 3). N. Deo, "Graph Theory with Application to Eng. & Computer Science," Prentice-Hall, 1974