Ⅳ-173 単列三角鎖の同時調整（連立2元1次方程式による）

北海道産業短期大学　正会員　今井芳雄

§1. 前言. 単列三角鎖（Single Chain of triangles）の調整は第1次三内角の和, 第2次方位条件, 第3次辺条件を用いる近似解に止まっている. 筆者はChainを作る三角形の数の多かに関係なく連立2元1次方程式を解いて間に合う同時調整を見出したので発表する

§2. 誤差の条件式. 三角形 $1^{\#}$ の内角 A_1, B_1, C_1 の補正角を $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$, 角 A_1, B_1 の $\log_{10}\sin$ の1秒の表差を a_1, b_1, $A_1+B_1+C_1-180°=w_1$ 残りの三角形についても順次 2, 3, 4, 5 とする。辺 Z-5 の算出された方位角を T_6'　$T_6'-T_6=w_7$ とおく 条件式は次の8個となる

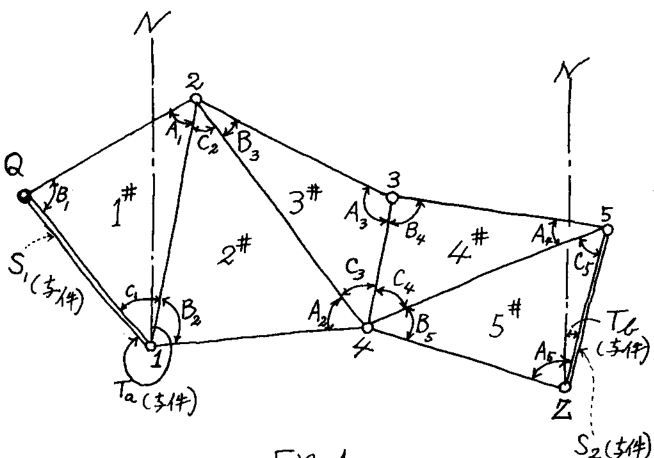

Fig. 1

$\phi_1=\alpha_1+\beta_1+\gamma_1+w_1=0\cdots(2.1)$

$\phi_2=\alpha_2+\beta_2+\gamma_2+w_2=0\cdots(2.2)$, $\phi_3=\alpha_3+\beta_3+w_3=0\cdots(2.3)$, $\phi_4=\alpha_4+\beta_4+\gamma_4+w_4=0\cdots(2.4)$, $\phi_5=\alpha_5+\beta_5+\gamma_5+w_5=0\cdots(2.5)$, $\phi_6=\sum_1^5\log_{10}\sin A-\sum_1^5\log_{10}\sin B+\sum_1^5(a\cdot\alpha)-\sum_1^5(b\cdot\beta)-\log_{10}\frac{S_1}{S_2}=0\cdots(2.6)$, $\phi_7=\gamma_1-\gamma_2+\gamma_3+\gamma_4-\gamma_5+w_7=0\cdots(2.7)$, $f(\alpha.\beta.\gamma)=\sum_1^5(\alpha)^2+\sum_1^5(\beta)^2+\sum_1^5(\gamma)^2=\text{minimum}\cdots(2.8)$

§3. 誤差方程式. $f(\alpha,\beta.\gamma)$ をminimumにするには2乗の和であるから f の全微分をZeroとおくことによって求められる。$\phi_1,\cdots\phi_7$ の右辺はZeroであるからその全微分はZeroである Lagrange Multiplier $\lambda_1\cdots\lambda_7$ を ϕ の全微分に乗じ f の全微分にすべて加え合わせたものもZeroである、然るとき α につき5個. β, γ についても5個づつ計15個の誤差方程式が得られる

$2\alpha_1+\lambda_1+\lambda_6\cdot a_1=0\cdots(3.1)$　$2\beta_1+\lambda_1+\lambda_6(-)b_1=0\cdots(3.6)$　$2\gamma_1+\lambda_1+\lambda_7=0\cdots(3.11)$　$2\gamma_2+\lambda_2-\lambda_7=0\cdots(3.12)$, $2\gamma_3+\lambda_3+\lambda_7=0\cdots(3.13)$, $2\gamma_4+\lambda_4+\lambda_7=0\cdots(3.14)$, $2\gamma_5+\lambda_5-\lambda_7=0\cdots(3.15)$

§4. 誤差方程式の解　$(3.1)+(3.6)+(3.11)=2(\alpha_1+\beta_1+\gamma_1)+3\lambda_1+\lambda_6(a_1-b_1)++\lambda_7=0\cdots(4.1)$ ここで $\alpha_1+\beta_1+\gamma_1=-w_1$ を考えにいれて $-\lambda_1=\{\lambda_6(a_1-b_1)+\lambda_7-2w_1\}\times\frac{1}{3}\cdots\cdots(4.2)$ この λ_1 と(3.1)式から $\alpha_1=\lambda_6\{-\frac{1}{3}a_1-\frac{1}{6}b_1\}+\frac{1}{6}\lambda_7-\frac{1}{3}w_1\cdots\cdots(4.11)$、同様の方法で

$\beta_1=\lambda_6\left\{\frac{1}{6}a_1+\frac{1}{3}b_1\right\}+\frac{1}{6}\lambda_7-\frac{1}{3}w_1 \cdots\cdots (4.16)$ $\gamma_1=\lambda_6\left\{\frac{1}{6}a_1-\frac{1}{6}b_1\right\}-\frac{1}{3}\lambda_7-\frac{1}{3}w_1 \cdots\cdots (4.21)$

$\alpha_2=\lambda_6\left\{-\frac{1}{3}a_2-\frac{1}{6}b_2\right\}-\frac{1}{6}\lambda_7-\frac{1}{3}w_2 \cdots\cdots (4.12)$ $\beta_2=\lambda_6\left\{\frac{1}{6}a_2+\frac{1}{3}b_2\right\}-\frac{1}{6}\lambda_7-\frac{1}{3}w_2 \cdots\cdots (4.17)$

$\gamma_2=\lambda_6\left\{\frac{1}{6}a_2-\frac{1}{6}b_2\right\}+\frac{1}{3}\lambda_7-\frac{1}{3}w_2 \cdots\cdots (4.22)$ λ_7の係数の+, −の区別は(2.7)式に対応して定まる. 残りの三角形についても同様 α, β, γ が求められいづれも λ_6, λ_7 の2未知数を含むのみである. α, β を(2.6)式に γ を(2.7)式に代入すれば λ_6, λ_7 の連立2元1次方程式が得られる

$$\sum_1^5 \log_{10}\sin A-\sum_1^5\log_{10}\sin B+\lambda_6\times\left[-\frac{1}{3}\left\{\sum_1^5(a^2+b^2)+\sum_1^5(a\cdot b)\right\}\right]+\frac{1}{6}\lambda_7\left\{a_1-a_2+a_3+a_4-a_5\right.$$
$$\left.-(b_1-b_2+b_3+b_4-b_5)\right\}-\frac{1}{3}\sum_1^5\left\{w(a-b)\right\}-\log_{10}\frac{S_1}{S_2}=0 \cdots\cdots (4.31)$$

$$\frac{1}{6}\lambda_6\left\{a_1-a_2+a_3+a_4-a_5-(b_1-b_2+b_3+b_4-b_5)\right\}-\frac{1}{3}\times 5\lambda_7-\frac{1}{3}(w_1-w_2+w_3+w_4-w_5)+w_7=0 \cdots (4.32)$$

この連立2元1次方程式をといて λ_6, λ_7 を所望の桁数まで求める

§5. 計算例. Fig.1. において $A_1=59°21'18''$ $a_1=10^{-6}\times1.3$. $A_2=63°4'30''$, $a_2=10^{-6}\times1.1$. $A_3=105°33'12''$ $a_3=-10^{-6}\times0.5$, $A_4=32°47'24''$. $a_4=10^{-6}\times3.2$. $A_5=66°54'31''$. $a_5=10^{-6}\times0.9$ $B_1=72°9'59''$. $b_1=10^{-6}\times0.7$. $B_2=74°36'37''$, $b_2=10^{-6}\times0.6$. $B_3=28°16'11''$, $b_3=10^{-6}\times3.9$. $B_4=75°20'23''$ $b_4=10^{-6}\times0.5$. $B_5=45°35'30''$, $b_5=10^{-6}\times2.0$. $C_1=48°28'42''$. $C_2=42°18'57''$. $C_3=46°10'38''$ $C_4=71°52'16''$. $C_5=67°29'57''$. $w_1=-1''$. $w_2=4''$. $w_3=+1''$. $w_4=+3''$. $w_5=-2''$. $w_7=-2''$ $T_a=314°2'18''$. $\log_{10}S_1=3.278626$. $\log_{10}S_2=3.190326$. $T_b=10°44'62''$ とすれば(4.31)式から

$$-10^{-12}\times12.596666\lambda_6-10^{-6}\times0.0833333\lambda_7-0.0000237666=0 \cdots\cdots (4.41)$$
$$-10^{-6}\times0.08333333\lambda_6-1.6666666\lambda_7\quad-2.333333\quad=0 \cdots\cdots (4.42)$$

が得られる. これをといて $\lambda_6=-10^{6}\times1.878102$, $\lambda_7=-1.305625$ となる これを(4.11)式, (4.16), (4.22)に入れて $\alpha_1=1.15$秒, $\beta_1=-0.73$, $\gamma_1=0.58$, $\alpha_2=-0.24$ $\beta_2=-1.84$. $\gamma_2=-1.93$ $\alpha_3=0.36$, $\beta_3=-2.8$ $\gamma_3=1.48$, $\alpha_4=0.94$. $\beta_4=-2.5$, $\gamma_4=-1.4$. $\alpha_5=2.1$. $\beta_5=-0.7$ $\gamma_5=0.58$秒が得られる. 補正量はこの符号に従って A, B, C に代数和すれば最確値になる.

§6. 結言 得られた(4.31), (4.32)両式は単列三角鎖が文字どおりSingleであれば三角形の数如何に係らず連立2元1次方程式によって同時調整(Adjustment)の出来ることを示している. 計算例は5個の三角形であつたが, いくつにも拡張して適用出来る。もし方位条件がなければ(4.31)式のみで $\lambda_7=0$ とおいて λ_6 を決定すればよい 三角形の三内角の和の誤差 w が1秒程度でも計算的には小数点以下こまかく補正値が得られ, 同時調整のうま味がたやすく得られる (1975. 4. 2)