IV-165　　アーランサービスを考慮した循環待ち合わせ系の解析

京都大学工学部　　正員　吉川和広
京都大学工学部　○正員　山本幸司

1. はじめに

従来，サイクルキューモデルの数値解法としては，

① サービスが完全に過去に関係のないランダムな状態を想定することにより，輻輳の程度の上限を評価することができること，

② 状態記述が比較的簡単となり，その結果，数値解析が容易となること，

などの理由により指数サービスを仮定した研究が多かった。しかし，実際現象におけるサービス時間は指数分布よりもむしろアーラン分布で近似できるものがほとんどである．そこで筆者らは図-1に示す2段のサイクルキューをアーランサービスサイクルキューと考え，その定常状態を連立一次方程式系として定式化するとともに，まずスィープアウト法による解析を試みた。この場合，指数サービスサイクルキューではその生起状態が，$P(n_1, n_2 | t)$ という簡単な形によって記述できるのに対し，アーランサービスサイクルキューの場合には，

$$P(a_1^1, a_2^1, \cdots, a_{k_1}^1 ; a_1^2, a_2^2, \cdots, a_{k_2}^2 ; n_1, n_2 | t)$$

という複雑な形を必要とする．ここに，

$$\left.\begin{array}{l}
\sum_{j=1}^{k_1} a_j^1 = \begin{cases} S_1 \ (n_1 \geqq S_1) \\ n_1 \ (n_1 < S_1) \end{cases}, \quad \sum_{j=1}^{k_2} a_j^2 = \begin{cases} S_2 \ (n_2 \geqq S_2) \\ n_2 \ (n_2 < S_2) \end{cases} \\
P(n_1, n_2 ; t) = \sum_{\{a_j^1, a_j^2\}} P(a_1^1, \cdots, a_{k_1}^1 ; a_1^2, \cdots, a_{k_2}^2 ; n_1, n_2 | t) \\
\sum_{n_1=0}^{N} P(n_1, n_2 | t) = 1 \quad , \quad n_1 + n_2 = N
\end{array}\right\} \quad (1)$$

である。このため，指数サービスの場合は状態確率変数の数が N+1 個であるのに対し，アーランサービスでは，

$$\left.\begin{array}{l}
M = \sum_{x=0}^{N} {}_{x+k_1-1}C_x \times {}_{N-x+k_2-1}C_{N-x} \\
\text{ここに，} \quad x = \begin{cases} S_1 \ (n_1 > S_1) \\ n_1 \ (n_1 \leqq S_1) \end{cases}, \quad N - x = \begin{cases} S_2 \ (n_2 > S_2) \\ n_2 \ (n_2 \leqq S_2) \end{cases}
\end{array}\right\} \quad (2)$$

となり，k_1, k_2, S_1, S_2 の各値が大きくなるにつれ，M の値は指数的に増大してしまう。このように状態確率変数が多くなれば，連立一次方程式の係数行列もキングサイズになり，大型電子計算機を利用するにしても スィープアウト法によって解析するのは困難である。

そこでアーランサービスサイクルキューの係数行列に注目すると，「対角要素が NON ZERO で，非対称かつ非常に疎であるが，帯行列の性質を持たないキングサイズの行列」という性質を持つことが明らかとなった．係数行列がこのような性質を持つ連立一次方程式の解法としては，反復法の一種の CG 法が有効である。

2. モデルの解法

アーランサービスサイクルキューモデルの状態方程式は，定常状態を考えれば次のような連立一次方程式系として表わすことができる。

$$\left.\begin{array}{l}
A x = b \\
\text{ここに，} \quad A = \overbrace{\left(\begin{array}{c} \boxed{\begin{array}{c}\text{対角要素が} \\ \text{NON ZERO} \\ \text{な疎行列}\end{array}} \\ 1, 1, \cdots, 1 \end{array} \right)}^{M} \Big\} M-1 \qquad \begin{array}{l} x = (x_1, \cdots, x_M)^T \\ b = (0, \cdots, 0, 1)^T \end{array}
\end{array}\right\} \quad (3)$$

いまこの連立一次方程式を次のように変形すれば，$f(x)$ を最小とするような x を求める極値問題に帰着することができる．

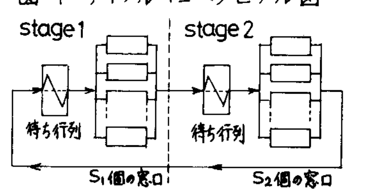
$$\left.\begin{array}{l}
r = b - A x \ , \quad r \text{；残差ベクトル} \\
f(x) = (r, r) = \sum_{i=1}^{M} r_i^2
\end{array}\right\} \quad (4)$$

上式から明らかなように $f(x)$ は常に非負である。正解が得られたときには $r = \mathbf{0}$ が成立し，このときは明らかに，

$$f(x) = 0$$

となる．実際の計算においては $f(x)$ の値が許容誤差以下にな

図-1 サイクルキューのモデル図



本論文で使用した記号

S_i；第iステージの窓口数　k_i；第iステージのアーランサービスの位相

a_j^i；第iステージのS_i個の窓口のうち仮想窓口jでサービス中の客数

n_i；任意の時刻tにおいて第iステージにいる客数

N；サイクルキューシステム全体にいる客数（入力源の個数）

A；各状態確率変数を未知数とする状態方程式の係数行列の任意の1行を単位ベクトルで置きかえた行列

M；状態確率変数の数，また行列Aのランク数

H_i；第iステージでサービス中の土運船の平均隻数

L_{qi}；第iステージでの土運船の平均待ち行列長

れば近似解が得られたとして反復計算を打切ればよい。

CG法は本来このような極値問題の解法の1つであり，変数xを1つずつ動かさずに$f(x)$の最急勾配方向をたどり，特に最急勾配方向から前回修正した方向の成分を除いたものを今回の修正方向にとりながら解を改善していく方法である．いま，この方法によって，P_k：前回修正した方向の成分を除いた最急勾配方向，および，α_k：P_k方向に修正すべき大きさ，が求まると，第$k+1$ステップの近似解x_{k+1}は前回の近似解x_kを用いて，

$$x_{k+1}=x_k+\alpha_k P_k \qquad (5)$$

によって求めることができる。

3. モデルの適用事例

CG法によるアーランサービスサイクルキューモデルの解析が実際の循環待ち合わせ現象の解析法として有効なものであるかどうか，すなわち同一現象を指数サービスサイクルキューモデルとして解析した結果と比較して十分に意義があるかを検討するため，次のようなしゅんせつ工事への適用を考えた。

入力源の個数（土運船の隻数）N＝4，第Iステージの窓口数（しゅんせつ船の隻数）$S_1=1$，同サービス時間の平均$1/\mu_1=51.7$分，同位相$k_1=11$，第IIステージの窓口数（押船の隻数）$S_2=3$，同サービス時間の平均$1/\mu_2=228.0$分，同位相$k_2=110$

しかし，これらの値によって定式化しようとすれば，式(2)より状態確率変数の数Mが2,117,061個となりCG法を適用するにしても計算が困難である。そこで，ここではまず表-1に示すように，位相k_1, k_2を小さくした低次のアーランサービスのcaseについて計算することにした。なお，計算においては式(4)中の$f(x)$の許容誤差を1.0×10^{-15}とした。評価値としてH_1, H_2，Lq_1, Lq_2をとり，計算結果を示したのが表-2，図-2である。これらより以下のことがいえる。

① 各評価値とも指数サービス（図-2では○印で示す）とアーランサービスとの差が明確に出ている。

② H_1およびH_2はk_1, k_2の値が大きくなるにつれて増加していくが，Lq_1, Lq_2は減少する。また，各評価値は位相が大きくなるにつれてほぼある値に収束しつつあることが認められる。

4. おわりに

適用事例の計算結果より，アーランサービスサイクルキューとしての解析が有効であることが明らかとなった。また位相が大きくなってもH_i, Lq_iがある値に収束していくことが予想された。このことは，適用事例のような高次のアーランサービスサイクルキューをより低次なアーランサービスサイクルキューによって近似的に解析可能となることを意味する。

今後は，これを実証すべく高次のアーランサービスあるいは一定サービスの場合についての解析を試みる。また，本方法は3段以上のサイクルキューに対しても適用することが可能であり，実際現象への適用を考えている。これらに関しては講演時に発表する。

表-1 各CASEの状態確率変数

k_1 \ k_2	1	3	4	5	10
1	<u>5</u>	30	55	91	506
2	9	<u>50</u>	<u>90</u>	<u>147</u>	792
3	13	<u>70</u>	<u>125</u>	203	1078
5	21	110	195	<u>315</u>	<u>1650</u>

注）下線は事例に用いたCASEを示す

図-2 位相k_1, k_2と評価値との関係

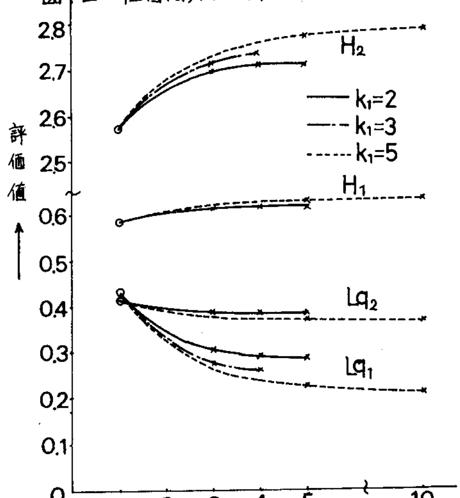


表-2 各CASEの計算結果

	$M/1+M/3$	$E_2/1+E_3/3$	$E_2/1+E_4/3$	$E_2/1+E_5/3$	$E_3/1+E_3/3$	$E_3/1+E_4/3$	$E_5/1+E_5/3$	$E_5/1+E_{10}/3$
P(0,4)	0.417	0.388	0.386	0.385	0.381	0.379	0.371	0.368
P(1,3)	0.283	0.370	0.376	0.380	0.392	0.399	0.427	0.440
P(2,2)	0.193	0.188	0.188	0.188	0.185	0.184	0.177	0.173
P(3,1)	0.087	0.050	0.046	0.044	0.039	0.036	0.025	0.019
P(4,0)	0.020	0.005	0.004	0.003	0.003	0.002	0.001	0.000
Lq_1	0.427	0.302	0.292	0.286	0.272	0.261	0.228	0.212
Lq_2	0.417	0.388	0.386	0.385	0.381	0.379	0.371	0.368
H_1	0.583	0.612	0.614	0.615	0.619	0.621	0.629	0.632
H_2	2.572	2.698	2.708	2.714	2.728	2.739	2.772	2.778