

大阪市立大学工学部 正員 岡村 治子

" " 和村 昂

1 はじめに

交通ネットワーク解析において、カットセットはしばしば有効に利用することができる。これによって、カットの発生については、グラフの単純化による求め方(参考文献(1)), 以下単純化(その1)とよぶことにする)を検討したが、この方法ではグラフが大きくなると計算が困難であった(除く点、そこから多角形が四角形以上のとき $C(V, E)_A$ が簡単に求められなくなる)。ここでは、この欠点を持たないグラフの単純化を考察したが、グラフによっては単純化(その1)を用いる方が簡単な場合もある。

2. グラフの単純化とカットの関係

グラフは、点の集合 V と V の2点を結ぶ辺の集合 E とからなり、 $G=(V, E)$ とあらわす。 (V, E) のカット全体からなる集合を $C(G)$ とあらわす。 E の辺 $e_1, e_2, \dots, e_i$ を含む G のカット全体からなる集合を $C_G[e_1, e_2, \dots, e_i]$ とあらわす。ここでは、辺を一点に縮小して、グラフの単純化をやる。

Case 1. V が v の次数が3, v と接合する辺を e_1, e_2, e_3 としたとき、 $\exists e_4 \in E$, e_1, e_2, e_4 が三角形を作るとき (図-1)。

G の G の e_3 を一点に縮小したグラフを G^* とおくと、 $C(G) = C(G^*) \cup C_G[e_3]$ となる。

$C_G[e_3]$ は次の4種類からなる。

- (1) e_1 と e_2 も含む。(2) $\{e_1, e_2, e_3\}$
- (3) e_1, e_4 を含む ($= C_G[e_1, e_4, e_3]$)
- (4) e_2, e_4 を含む ($= C_G[e_2, e_4, e_3]$)

(1) のカットは $\{ \{e_3\} \cup C - \{e_1, e_2\} \mid C \in C_{G^*}[e_1, e_2] \}$ で求められる。

$\times C_G[e_1, e_4, e_3] = \{ \{e_1, e_3\} \cup C - \{e_2\} \mid C \in C_{G^*}[e_2, e_4], C \neq e_{i1}, e_{i2}, \dots, e_{ik} \}$
 $C_G[e_2, e_4, e_3] = \{ \{e_2, e_3\} \cup C - \{e_1\} \mid C \in C_{G^*}[e_1, e_4], C \neq e_{j1}, e_{j2}, \dots, e_{jl} \}$
 として $C(G)$ は $C(G^*)$ から求められる。

Case 2. V が v の次数が3, v と接合する辺を e_1, e_2, e_3 としたとき、 $\exists e_4, \exists e_5 \in E$, e_1, e_2, e_4 と e_2, e_3, e_5 が三角形を作るとき (図-2)。

G の辺 e_1 を縮小すると、 e_2 と e_4 が重なるがこれと $\langle e_2, e_4 \rangle$ とおいたグラフを G^* とする。

$C(G) = C(G^*) \cup C_G[e_1, e_2] \cup C_G[e_1, e_4]$
 $(C(G^*)$ の $\langle e_2, e_4 \rangle$ を含むカットと $C(G)$ の e_2, e_4 を含むカットを同一視する。)

$C_G[e_1, e_2] = \{ \{e_1, e_2\} \cup C - \{e_3\} \mid C \in C_{G^*}[e_2, e_5] \} \cup \{e_1, e_2, e_3\}$

$C_G[e_1, e_4] = \{ \{e_1, e_4\} \cup C - \{e_2, \langle e_2, e_4 \rangle\} \mid C \in C_{G^*}[e_3, \langle e_2, e_4 \rangle] \} \cup$

$\{ \{e_4, e_1, e_3\} \cup C - \langle e_2, e_4 \rangle \mid C \in C_{G^*}[e_5, \langle e_2, e_4 \rangle], C \neq e_{i1}, e_{i2}, \dots, e_{ik} \}$

Case 3. V が v_1, v_2, v_3 から三角形を作り、 v_1, v_2 から order 3 のとき (図-3)

G の e_1 を縮小した G を G^* とおくと、 $C(G) = C(G^*) \cup C_G[e_1, e_2] \cup C_G[e_1, e_3]$

$C_G[e_1, e_2] = \{ \{e_1, e_2\} \cup C - \{e_3\} \mid C \in C_{G^*}[e_3], C \neq \langle e_2, e_3 \rangle \} \cup \{e_1, e_2, e_3\}$

図-1

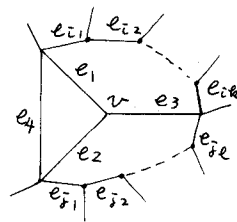


図-2

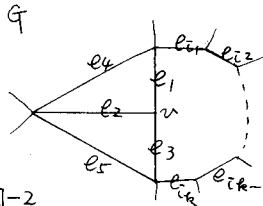
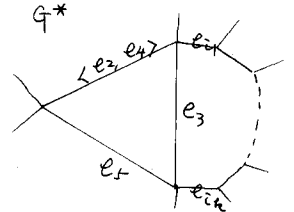
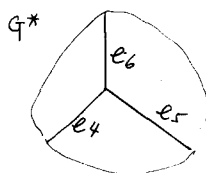
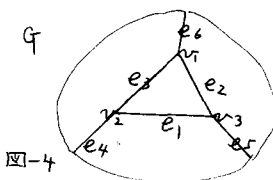
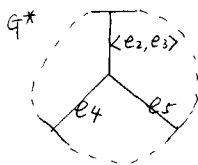
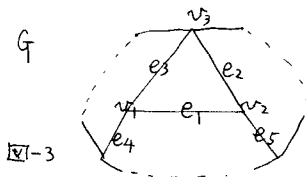


図-3



$$C_G[e_1, e_3] = \{ \{e_1, e_3\} \cup C - \{e_4\} \mid C \in C_{G^*}[e_4], \{e_1 < e_2, e_3 >\} \} \cup \{e_1, e_3, e_4\}$$



Case 4 $V \ni v_1, v_2, v_3$ が三角形を作り、各点 v_i が order 3 のとき (図-4)。

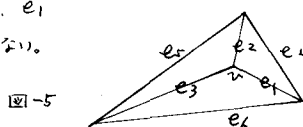
G の辺 e_1, e_2, e_3 を一点に縮小したグラフを G^* とおくと $C(G) = C(G^*) \cup C_G[e_1, e_2] \cup C_G[e_1, e_3] \cup C_G[e_2, e_3]$

$$C_G[e_1, e_2] = \{ \{e_1, e_2\} \cup C - \{e_4\} \mid C \in C_{G^*}[e_4] \} \cup \{e_1, e_2, e_3\}$$

$$C_G[e_2, e_3] = \{ \{e_2, e_3\} \cup C - \{e_4\} \mid C \in C_{G^*}[e_4] \} \cup \{e_2, e_3, e_1\}, C_G[e_1, e_3] = \{ \{e_1, e_3\} \cup C - \{e_4\} \mid C \in C_{G^*}[e_4] \} \cup \{e_1, e_3, e_2\}$$

注意: Case 1 ~ Case 4 において、 G^* を作るとき、上記以外の辺も同時に縮小するが、又は上記以外の二つ以上の辺が重なる場合、上の方法は用いられない。たとえば図-5において、 e_1 と縮小すると、 e_2 と e_4 以外に e_3 と e_6 も重なるので Case 2 を用いることはできない。

図-5 の場合、単純化 (その1) を用いることにより。



3. カットの求め方

Case 1 ~ Case 4 を用いて、単純化 (その1) の方法も組合せて、グラフの単純化を行い、 G のカットを求める。

4. 例

$G = \langle V, E \rangle$, $V = \{v_1, \dots, v_6\}$, $E = \{1, 2, \dots, 10\}$, 図-6 のグラフを考える。三角形 $v_3 v_4 v_5$ に Case 3 を用い、10 を縮小したグラフを G_1 とする。さらに v_1 に Case 2 を用い、8 を縮小したグラフを G_2 とする (図-7)。

G_2 のカットは単純化 (その1) に求められる。(二つは省略する)

$$C(G_2) = \left\{ \begin{aligned} &\{1, 4, \langle 1, 6 \rangle\}, \{3, \langle 1, 6 \rangle, \langle 7, 8 \rangle\}, \{3, 4, 5\}, \{5, 9, \langle 7, 8 \rangle\} \\ &\{4, 5, \langle 7, 8 \rangle, \langle 1, 6 \rangle\}, \{3, 4, 9, \langle 7, 8 \rangle\}, \{3, 5, 9, \langle 1, 6 \rangle\} \end{aligned} \right\}$$

$$C(G_1) = C(G_2) \cup C_{G_1}[1, 2] \cup C_{G_1}[2, 6]$$

$$C_{G_1}[3, 4] = \{ \{3, 4, 5\}, \{3, 4, 9, \langle 7, 8 \rangle\} \} \text{ あり}$$

$$C_{G_1}[1, 2] = \{ \{1, 2, 4, 5\}, \{1, 2, 4, 9, \langle 7, 8 \rangle\}, \{1, 2, 3\} \}$$

$$C_{G_2}[3, \langle 1, 6 \rangle] = \{ \{3, \langle 1, 6 \rangle, \langle 7, 8 \rangle\}, \{3, 5, 9, \langle 1, 6 \rangle\} \}$$

5, $\langle 7, 8 \rangle$ を含まない $C_{G_2}[4, \langle 1, 6 \rangle]$ の元 = $\{ \{9, 4, \langle 1, 6 \rangle\} \}$ あり

$$C_{G_1}[2, 6] = \{ \{2, 6, \langle 7, 8 \rangle\}, \{2, 6, 5, 9\}, \{6, 2, 3, 9, 4\} \}$$

$$C(G) = C(G_1) \cup C_G[7, 10] \cup C_G[8, 10]$$

$\langle 7, 8 \rangle$ を含まない $C_G[5]$ の元 = $\{ \{3, 4, 5\}, \{3, 5, 9, 1, 6\}, \{1, 2, 4, 5\}, \{2, 6, 5, 9\} \}$

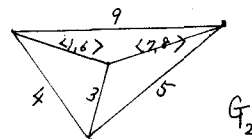
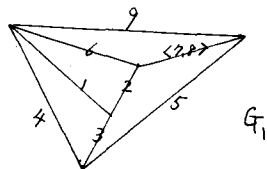
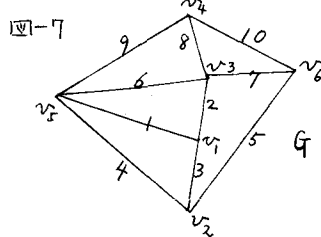
$$\text{より } C_G[7, 10] = \{ \{7, 10, 3, 4\}, \{7, 10, 3, 9, 1, 6\}, \{7, 10, 1, 2, 4\} \}$$

$$\{7, 10, 2, 6, 9\}, \{7, 10, 5\}$$

$$\text{同様に } C_G[8, 10] = \{ \{8, 10, 4, 1, 6\}, \{8, 10, 3, 5, 1, 6\}, \{8, 10, 2, 6, 5\} \}$$

$$\{8, 10, 6, 2, 3, 4\}, \{8, 10, 9\}$$

よって G のカットは 棒線を含む 23 個である。(カット $\langle, \rangle$ は G ではないものとする)



5. あとがき

単純化 (その1), (その2) の方法で単純化できないグラフについては、今後の考察が必要である。

参考文献

(1) 岡村・西村「グラフの単純化によるカットの求め方について」第29回土木学会年次学術講演会概要 (IV-94)