

1. まえがき

ネットワーク上における最大ODフロー（ネットワークの容量）問題に対して、カットを利用した解法としてこれまでカット法と名づけられている一つの方法を提案している。しかしカット法はぼう大な量のカットを発生させなければならぬので実用的には大きな問題とされているといえる。このためカットツリー等を利用した簡便な近似計算法を考えてみた。

2. カット法

ネットワーク $G(N, A)$ が与えられ、各アークの容量 c が与えられているとする。またこの上を流れるフローは(1)式のマトリクスで表わされる OD パターンを採っているとする。

$$P = \{p_{ij}\}, \quad \sum_i \sum_j p_{ij} = 1, \quad i, j \in N \quad (1)$$

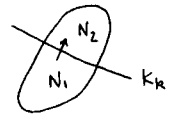
したがって OD フローは P にスカラー T をかけただけで表わされる。各アークのフローがアーク容量を超えない T の最大値を求めるのが最大 OD フロー問題といえる。

いまネットワークに任意のカットセット $K_k(N_1, N_2)$ を考える。これによって図-1のようにネットワークが N_1 と N_2 の2つの部分に分割されるとする。カット K_k の容量を $C_k(N_1, N_2)$ で表わし、カットを構成するアーク容量の和で表わす。簡単化のために、ここでは1-ドの容量は考慮に入れないでおく。カット K_k を横断する（通過する）フローは N_1 に含まれるゾーンに起点をもち、 N_2 に含まれるゾーンに終点をもちフローの和であるから、これを $F_k(N_1, N_2)$ とすると

$$F_k(N_1, N_2) = \sum_{i \in N_1} \sum_{j \in N_2} p_{ij} \quad (2)$$

したがってこのカット K_k において通り得る最大フロー T_k は

$$T_k = \frac{C_k(N_1, N_2)}{F_k(N_1, N_2)} \quad (3)$$

図-1 カット K_k

で表わされる。すなわち OD パターン P に T_k をかけ得られる OD フローまで流すことができる。この計算をすべてのカットについて行なうと、ネットワーク全体として受け入れられる最大フローは、これらの中の最小のものであり、これを T とすると

$$T = \min \{ T_k \} \quad (4)$$

であるから、 P にスカラー T をかけ得られる OD フロー $(T \cdot P)$ まで流すことができる。この T を P に対する最大フロー、またこの T を与えたカットを最小カットという。以上のような解法をカット法と呼ぶ。

この T の実行可能性については次のように説明できる。あるカットにおいてフローと容量がバランスしていない場合、全断面では容量があるからフローが偏っていることになり、一般にフローの超過部分から容量に余裕のある側にフローを転換させあるいは迂回させることによって容量とフローをバランスさせることができる。図-2(b), (c), (d) は (a) のカット K_k の上側から下側に横断フローを転換させるフロー転換の例を示している。このフ

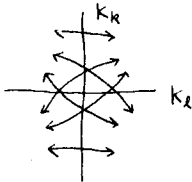
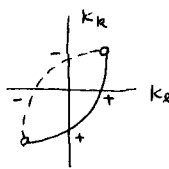
図-2(a) K_k の横断フロー

図-2(b) フロー転換

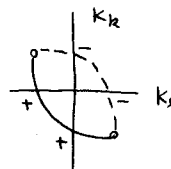


図-2(c) フロー転換

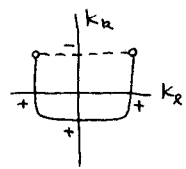


図-2(d) 迂回

ローカットは、容量に対する超過量、矢印で示したフローの大きさ、交差するカット K_2 の容量とフローの関係と考慮して図(a),(c),(d)の転換量をきめてやればよい。まず最小カット断面で実施し、フローとそれと交差する他のカットで実施する。このように波及させてすべての断面で T を受け入れるようフローを転換させれば、その結果 T が実行可能とするこゝができる。

3. 簡便カット法

この方法はとりあがるカットの数を最小限に限定して近似的に最大フロー問題を考察しようとする試みで、次のように2つの方法を考へてみた。

(1) その1

この方法は経験的にわかつているネットワーク断面やその他の方法で得た最小カットに近い容量の断面から得た T が実行可能かどうかを検討するために考へたものである。アルゴリズムの概略は次のようである。

ステップ1 (カット体系の指定) ネットワークをカットにより2分し2つの分割ネットワークをつくる。それらさらに次値のカットにより2分する手続きを繰り返して、 $n-1$ 個のカットで各ノードがはっきりと分離されるようなカット体系を指定する。経験的にわかつているネットワークも上位のカットで指定するがよい。

ステップ2 (カット容量のツリー表示) 指定されたカットの容量 T を(3)式より求める。この T が実行可能であるためには、各分割ネットワーク部分の容量が T 以上である必要あり。(あるいはさらに下位で T より小さい容量の部分があっても、その直接上位のカットへの迂回で補ふことが T に影響を及ぼさな場合もある。) この状況を見るために、指定カット体系に従ってカット容量とツリー状に表示する。

ステップ3 (最大フローの計算) カット容量のツリーからネットワーク全体として受け入れうるフローの最大値を求める。これはツリー上の最小値で与えられる。(カット容量の計算方法によっては別の方法となる。)

(2) その2

ネットワークの任意のツリーに対してカット容量ツリーを定義できるが、これを利用する方法である。

ネットワークの任意のツリーに対して、そのツリー上の各 P - Q をいっしょに含み他はツリー上になら P - Q よりなるカットが存在する。ツリー上の $n-1$ 個の P - Q に対して $n-1$ 個のこのようなカットがつくられるが、これらはお互いに独立で、このカットをそのツリーに対する基本カットという。基本カットの容量を元ツリー上に表わしたものをカット容量ツリー (cut-tree) というが、ここではカット容量に替えて、(3)式によるカットの処理可能交通量 T を表わしたものをとく。元ツリーが変ると別のカットが現れるので一定のルールでツリーを変化させ本検討のカットを取り出せるような改善プロセスが必要である。

計算例 図-3のネットワークに図-4のODパターンを対象として考へる。図-5は(その1)の例で(a)の指定カットに対して(b)のようなツリー表示ができ最小値 $T=10$ が得られる。図-6は(その2)の例で図-4のツリーに赤い基本カットとその容量、 T が得られる。カットツリー上の最小値がこのツリーから得られる T となる。

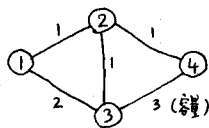


図-3

OD	1	2	3	4
1	*	0.1	0.1	0.1
2	0.1	*	0.1	0
3	0.1	0	*	0.1
4	0.1	0	0.2	*

図-4

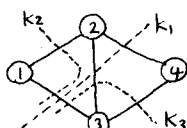


図-5(a)

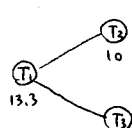


図-5(b)

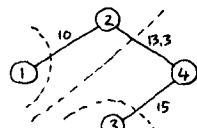


図-6

4. あとがき

簡便法ではカット数を少なくしているためカットの指定にあたって経験的な情報が重要となる。これに加えてさらに改善プロセスを有効なものとするこゝにより近似解法としての改良が期待されるが今後の課題として残されている。

参考文献: 西村, カットによる最大ODフロー問題への1つのアプローチ, 土木学会関西支部 年次学術講演概要, 昭和50年