IV-91　Wayne法の収束性について

京都大学工学部　正員　井上博司

1．まえがき

道路網における交通量配分の実際的計算法としてWayne法が知られている。この方法が等時間原則による交通量配分の近似的計算法であることは理論的には明らかにされていないが，M.J. Beckmanによれば，この方法は収束することが期待でき，しかもその期待される値は直観的に考えて等時間原則による解に一致するといわれている。Wayne法はいわゆる反復法の一種であるが，この方法を含めた反復法の収束性について考えてみたい。また収束性を改良するための手法を提案する。

2．反復法の収束性

反復法とは，毎回の最短路探索によって得られた新しい経路へ，一定の割合でOD交通量を配分し，道路区間交通量と走行時間を修正していくものである。このとき常にパスフローの和が所与のOD交通量に等しくなるように配分される。したがって初めは全OD交通量が配分されるが，その後は新しい経路への配分量だけ既に配分された交通量から割り引かれることになる。

いま第(k+1)回目の最短路探索によって得られたOD i の経路への配分量を x^i_{k+1}，所与のOD交通量を S^i，配分比率を λ_{k+1} とすると，

$$x^i_{k+1} = \lambda_{k+1} S^i \qquad (0 \leqq \lambda_{k+1} \leqq 1) \tag{1}$$

である。また第k回目の配分によって得られた道路区間 j の交通量を X^*_j とすると，第(k+1)回目の配分によって得られた道路区間 j の交通量 X_j は，

$$X_j = (1-\lambda_{k+1}) X^*_j + \sum_i x^i_{k+1} r^i_{k+1,j} = X^*_j + \lambda_{k+1}\left(\sum_i S^i r^i_{k+1,j} - X^*_j\right) \tag{2}$$

となる。ここに $r^i_{k+1,j}$ はルートベクトル $\mathbb{r}^i_{k+1}$ の第 j 要素である。

このときJørgensenの目標関数は，走行時間関数を $f_j(\xi)$ とすると，

$$J_{k+1} = \sum_j \int_0^{X^*_j + \lambda_{k+1}\left(\sum_i S^i r^i_{k+1,j} - X^*_j\right)} f_j(\xi)\, d\xi \tag{3}$$

であるが，これを2次項までテーラー展開すると，

$$J_{k+1} = J_k + \lambda_{k+1} A + \frac{\lambda_{k+1}^2}{2} B \tag{4}$$

となる。ここに，

$$A = \sum_j \left(\sum_i S^i r^i_{k+1,j} - X^*_j\right) f_j(X^*_j) \tag{5}$$

$$B = \sum_j \left(\sum_i S^i r^i_{k+1,j} - X^*_j\right)^2 \frac{d}{dX_j} f_j\left\{X^*_j + \theta\lambda_{k+1}\left(\sum_i S^i r^i_{k+1,j} - X^*_j\right)\right\} \qquad (0 \leqq \theta \leqq 1) \tag{6}$$

である。数列 J_k が収束するためには，

$$J_{k+1} < J_k$$

でなければならない。すなわち，

$$\lambda_{k+1} A + \lambda_{k+1}^2 \cdot \frac{B}{2} < 0 \tag{7}$$

したがって配分率 λ_{k+1} は，

$$0 \leqq \lambda_{k+1} \leqq -\frac{2A}{B} \tag{8}$$

でなければならない。

さてWayne法では，

$$\lambda_k = \frac{1}{k}$$

である。したがってWayne法では，

$$k > -\frac{B}{2A} \tag{9}$$

となったときに，数列 J_k が収束することが知られる。J_k が単調に減少していけば $\min J$ に近づくことが期待されるから，期待される収束値は等時間原則による解に一致する。

3. 収束性改良のための手法

式(4)で，

$$\begin{aligned}
A &= \sum_j \left(\sum_i S^i r^i_{k+1,j} - X_j^* \right) f_j(X_j^*) \\
&= \sum_j \left(\sum_i S^i r^i_{k+1,j} - \sum_i \sum_{p<k+1} x^i_p r^i_{pj} \right) f_j(X_j^*) \\
&= \sum_i S^i \sum_j r^i_{k+1,j} f_j(X_j^*) - \sum_i \sum_{p<k+1} x^i_p \sum_j r^i_{pj} f_j(X_j^*) \\
&< \sum_i S^i \sum_j r^i_{k+1,j} f_j(X_j^*) - \sum_i \sum_{p<k+1} x^i_p \sum_j r^i_{k+1,j} f_j(X_j^*) \\
&= 0
\end{aligned} \tag{10}$$

であるから，2次以上の微小項を無視すると，

$$J_{k+1} < J_k$$

となる。したがってWayne法は収束の最終的段階では1次的収束性を有している。

いまBの代わりに，

$$B^* = \sum_j \left(\sum_i S^i r^i_{k+1,j} - X_j^* \right) \frac{d}{dX_j} f_j(X_j^*) \tag{11}$$

を用い，J_{k+1} が最小になるような配分率を求めると，

$$\lambda_{k+1} = -\frac{A}{B^*} \tag{12}$$

となる。ただし，

$$0 \leqq \lambda_{k+1} \leqq 1 \tag{13}$$

でなければならない。もちろん配分率 $\lambda_{k+1} = -\frac{A}{B^*}$ を用いる方法は2次の収束性を有している。

また式(3)の3次の微小項までとると，

$$J_{k+1} = J_k + \lambda_{k+1} A + \lambda_{k+1}^2 \frac{B^*}{2} + \lambda_{k+1}^3 \frac{C^*}{6} + R_4 \tag{14}$$

ここに，

$$C^* = \sum_j \left(\sum_i S^i r^i_{k+1,j} - X_j^* \right)^3 \frac{d^2}{dX_j^2} f_j(X_j^*) \tag{15}$$

である。この3次の微小項までの和を最小にするような配分率を求めると，

$$\lambda_{k+1} = \frac{-B^* + \sqrt{B^{*2} - 2AC^*}}{C^*} \tag{16}$$

となる。

他の方法としては直接に

$$J_{k+1} = \sum_j \int_0^{X_j^* + \lambda_{k+1}\left(\sum_i S^i r^i_{k+1,j} - X_j^*\right)} f_j(\xi)\, d\xi \tag{17}$$

を最小にする方法が考えられる。これは λ_{k+1} についての1次元上の最小化であるから，黄金分割による方法，Fibonacci級数を用いる方法が適用できる。