

京都大学工学部 正 員 吉川和広

京都大学工学部 正 員 岡田憲夫

京都大学工学部 学生員 ○松下義次

1. はじめに

今日、都市の発展・膨張とともに、各都市間の境界地域まで都市化が進んでいる現象が多くみられる。このような都市間の境界地域に配水管網の整備をこなう場合には、各都市区域ごとに単独に整備をするより、両者を結合し両都市間で相互に配水の調整をこなえる配水管網システムにするほうが、全体からみた場合合理的である。

本研究は、単独の都市では水供給の不足する都市と水供給に余剰がある都市を想定するとともに、2都市の配水管網を結合させることにより2都市全体としての合理的な配水管網の布設方法を考察することにする。この場合、各都市の配水管網自体が大規模な場合には結合された全体の配水管網はさらに大きなものとなるので実際問題としては全体を個々の都市の配水管網問題に分割するとともに、その結合の問題を同時に考えることがしばしば必要になってくる。

本研究では、このような問題に対する解法として非線形計画におけるディコンポジション法を用いることにする。

2. 大規模な給配水施設のモデル化

本研究では、説明の都合上以下のような簡単な配水管網布設問題をとりあげることにする。

(1) 主要な前提

① 各地盤勾配は決まっているものとし、これと動水勾配が一致するように管路を布設する。(したがって、均等水圧条件が充足されている。)

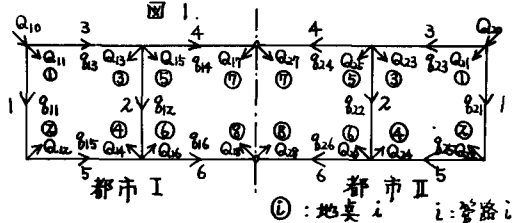
② 幹線管路網の布設問題のみをとりあげるが、その場合布設ルートは決まっている。

③ 各格子点より各地区に支管を通して配水されるものと考え、流出流量は格子点に集中しているものとみなす。

④ 評価基準は布設管路網全体の総費用をとりあげ、これを最小にする方法をモデル化する。

(2) モデルの定式化

複数の都市間の配水管網モデルとして図1のような簡単な例を考えることにする。



記号

g_{ij} : 都市 i の管路 j の流量

l_{ij} : 都市 i の管路 j の長さ

Q_{10} : 都市 i への流入量 (ただし図1に示す地点に流入する)

Q_{ij} : 都市 i の j 地点での流出量

$\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$: 管路設置を決める定数

この場合、次のように定式化される。

$$Z_0 = \sum_{i=1}^n (\alpha_i g_{1i} + \gamma_i) l_{1i} + \sum_{j=1}^m (\alpha_j g_{2j} + \gamma_j) l_{2j} \rightarrow \min$$

subject to

$$(I) \begin{cases} g_{11} + g_{12} = Q_{10} - Q_{11} \\ g_{11} - g_{15} = Q_{12} \\ -g_{12} + g_{13} - g_{15} = Q_{13} + Q_{15} \\ g_{12} + g_{15} - g_{16} = Q_{14} + Q_{16} \end{cases} \quad (II) \begin{cases} g_{21} + g_{23} = Q_{20} - Q_{21} \\ g_{21} - g_{25} = Q_{22} \\ -g_{22} + g_{23} - g_{25} = Q_{23} + Q_{25} \\ g_{21} + g_{25} - g_{26} = Q_{24} + Q_{26} \end{cases}$$

$$(III) \begin{cases} g_{16} + g_{26} = Q_{17} + Q_{27} \\ g_{16} + g_{26} = Q_{18} + Q_{28} \end{cases}$$

$$g_{ij} \geq 0 \quad (i = 1, 2 \quad j = 1, 2, \dots, 6)$$

ここで、 $l_{ij} = \text{一定}$, $\beta_1 = \beta_2 = 1.693$ として、次のように変形することにより、問題は簡略化される。

$$Z = g_{11}^{1.693} + (-g_{11} + g_{16} + Q_{12} + Q_{14} + Q_{16})^{1.693} + (-g_{11} + Q_{10} - Q_{11})^{1.693} \\ + (-g_{16} + Q_{10} - \frac{Q_{11}}{2})^{1.693} + (g_{11} - Q_{12})^{1.693} + g_{16}^{1.693} \\ + g_{21}^{1.693} + (-g_{21} + g_{26} + Q_{22} + Q_{24} + Q_{26})^{1.693} + (-g_{21} + Q_{20} - Q_{21})^{1.693} \\ + (-g_{26} + Q_{20} - \frac{Q_{21}}{2})^{1.693} + (g_{21} - Q_{22})^{1.693} + g_{26}^{1.693} \rightarrow \min$$

subject to

$$(I) \begin{cases} -g_{11} + g_{16} + Q_{12} + Q_{14} + Q_{16} \geq 0 \\ -g_{11} + Q_{10} - Q_{11} \geq 0 \\ -g_{16} + Q_{10} - \frac{Q_{11}}{2} \geq 0 \end{cases} \quad (II) \begin{cases} -g_{21} + g_{26} + Q_{22} + Q_{24} + Q_{26} \geq 0 \\ -g_{21} + Q_{20} - Q_{21} \geq 0 \\ -g_{26} + Q_{20} - \frac{Q_{21}}{2} \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} q_{11} - Q_{12} \geq 0 & q_{21} - Q_{22} \geq 0 \\ q_{16} \geq 0 & q_{26} \geq 0 \end{cases}$$

$$(III) \quad q_{16} + q_{26} - Q_{18} - Q_{28} = 0$$

したがって上記のモデルは結局線形制約条件のもとに非線形評価関数を最小にするような問題(一種の非線形計画問題)になっていることがわかる。

3. 非線形計画問題のディコンポジション手法による解法

一般に、 n つの部分の問題に分解可能な非線形計画問題は次のように定式化される。

$$z = f_1(x_1) + f_2(x_2) \rightarrow \min$$

$$\text{subject to} \quad g_1(x_1) \geq 0$$

$$g_2(x_2) \geq 0$$

$$g_3(x_1, x_2) \geq 0$$

なお、先に定式化したモデルは上記のような非線形計画問題のディコンポジション問題に相当していることがわかる。

非線形ディコンポジション原理はつぎのとおりラグランジュ関数の鞍点問題に帰着するがその証明は省略してその具体的な適用の方法についてのみ略述する。

①主問題により与えられる λ について

(1) 従問題I

(2) 従問題II

$$f_1(x_1, \lambda) \rightarrow \min$$

$$f_2(x_2, \lambda) \rightarrow \min$$

$$\text{a.t.} \quad g_1(x_1) \geq 0$$

$$\text{a.t.} \quad g_2(x_2) \geq 0$$

を解く。(ただし $\lambda \geq 0$)

②(主問題) $g_3(x_1, x_2) \geq 0$ を満たすように λ を調整する。 λ の調整にあたり、 $dl = -g_3(x_1, x_2)d\lambda$ であり、 λ に拘りて極大であるから $dl \geq 0$ となるように λ を調整する必要がある。そこで、 $\lambda^{k+1} = \lambda^k - \alpha g_3(x_1, x_2)\lambda$ によって λ を調整する。

以下、①、②のプロセスを繰り返すことになる。なお実際の計算にあたっては α の決定がきわめて難しく、試行錯誤的に決定する必要がある。また、 $\lambda = 0$ の場合について従問題(I), (II)を解いておくことにより、このとき $g_3(x_1, x_2) \geq 0$ が満たされないことを確

認しておくならば(もし満たされれば、対応する λ の要素は改善する必要がない)。結局、 $g_3(x_1, x_2) = 0$ が近似的に満たされるときに上記のくり返し計算を終了すればよいことになる。このときもとの全体の問題に対して近似的に最適解が得られたことが保証される。

4. 計算例

ここでは、 n で定式化した問題を非線形ディコンポジション手法により、Rosenの射影勾配法を用いて計算した。ただし、 $Q_{10} = 180, Q_{20} = 140, Q_{11} \sim Q_{28} = 20$ の場合の計算例を示す。その結果を示すと表1のようになる。これらの計算結果は共通の制約条件が 10^{-4} の誤差範囲で満足されたときのものである。これとみると明らかのように各計算結果はかなりの精度で酷似しているが、よくみると、Case IおよびCase IIの $\alpha = 0.1$ の場合は全体を1つの問題として解いた解に比べてかなり異なっている。(両者とも、目的関数の値はむしろ小さく良好のようにみえる。)これは実は、従問題における制約条件は 10^6 の誤差の範囲で判定しているのに、共通の制約条件は 10^4 の誤差を許容範囲としたためである。これに対して、Case IIの $\alpha = 1$ は、全体の解ときわめて近いが、それはこの解のみが、 10^6 の誤差範囲内にもおさまっているためである。いずれにしても α 設定の方法、制約条件の誤差の判定の精度によって解は影響を受けることがわかるが、この点については実用的な見地から検討することが必要であると考えられる。

5. おわりに

上で示した例においては、非線形ディコンポジション手法により解いた解が、精度の点でまだ改善の余地があり、また α の値の決定にも種々の工夫が必要である。この点については口頭で詳細に発表することにする。

また、ここでは配水管網の布設問題を幹線のみを対象としているが、幹線配水管網と支線配水管網との結合調整の問題も非線形ディコンポジション原理を用いることがきわめて有効であることが示される。これについても講演時に説明することにする。

表1.

	初期値				α	近似的最適解				目的関数値	くり返し回数 (判定条件 10^4)	くり返し回数 (判定条件 10^6)
	q_{11}	q_{16}	q_{21}	q_{26}		q_{11}	q_{16}	q_{21}	q_{26}			
Case I	20.0	40.0	20.0	20.0	1.0	62.1	21.3	56.0	18.7	7634.4	30	収束せず
					0.1	63.6	22.9	56.5	17.1	7607.7	120	670
Case II	20.0	40.0	20.0	20.0	1.0	63.8	23.2	63.1	16.7	7666.0	20	73
					0.1	65.6	27.9	53.5	11.1	7553.9	128	収束せず
Case III	20.0	40.0	20.0	20.0		62.7	20.0	54.5		7661.2		

Case III: 全体を1つの問題として解いた場合